Mathematik I WS 2012/13
8. Übungsblatt

1. Beweisen Sie die folgenden Identitäten

   (a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

   (b) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

   (c) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

2. Beweisen Sie die folgenden Identitäten

   (a) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

   (b) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

   (c) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

3. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

   gilt.

4. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen

   (a) $e^{2x} + 2e^x - \ln(e^2) = 1$

   (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = 2$

   (c) $\ln(e^x + 1) + \ln(e^x - \frac{1}{2}) = x$

5. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{für } x \leq -1 \\ ax^2 + 2x & \text{für } -1 < x < 1 \\ be^{x^2-1} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

6. Sei

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2}$$

   (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D für f.

   (b) An welchen Punkten in $\mathbb{R} \setminus D$ ist f stetig ergänzbar? Geben Sie für diese Punkte den dazugehörigen Funktionswert der stetigen Ergänzung an.

7. Fällt Licht mit dem Einfallswinkel α auf einen Spalt, wird es gebeugt. Für die Intensität $f(\beta)$ des gebeugten Lichtes in Abhängigkeit vom Ausfallswinkel β (β ist die Abweichung von der Lotrichtung der Spaltebene) gilt folgende Formel:

$$f(\beta) = \frac{\sin^2\left(k\left(\sin\alpha - \sin\beta\right)\right)}{\left(\sin\alpha - \sin\beta\right)^2} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

   Dabei ist k eine Konstante, die von der Breite des Spaltes und der Wellenlänge des Lichtes abhängt. Ist die Funktion $f(\beta)$ an der Stelle $\beta = \alpha$ hebbar stetig? Falls ja, welcher Funktionswert wird für die stetige Ergänzung benötigt?