

# Mathematik I WS 2012/13

## 7. Übungsblatt

1. Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = e^{x+3}, \quad g(x) = e^{2-x}, \quad h(x) = -4 \cdot e^{2x-1}.$$

Welche dieser Funktionen sind monoton steigend, welche sind monoton fallend? Geben Sie, sofern sie existieren, obere und untere Schranken für die Funktionen an.

2. Es seien  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 12x + 18}$  und  $g(x) = \cos(x + 1)$ . Sind  $f$  und  $g$  als Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  bijektiv? Falls nicht, welches sind die maximalen Definitions- und Bildbereiche, für welche sie bijektiv sind? Geben Sie die Umkehrfunktionen an (falls existent, auf ganz  $\mathbb{R}$ , ansonsten für die zuvor angegebenen Bereiche).

3. Bestimmen Sie für die Funktion  $f(x) = \frac{2x-3}{4-x}$

- (a) den maximalen Definitionsbereich  $D$ ,
- (b) den Bildbereich  $B$ , so dass  $f: D \rightarrow B$  surjektiv ist,
- (c) die Bereiche, auf denen  $f(x) < 0$  gilt, sowie
- (d) die maximalen Bereiche, auf denen  $f$  monoton ist.

4. Aus der Vorlesung sind Formeln für  $\sin(x+y)$  und  $\cos(x+y)$  bekannt. Bestimmen sie entsprechende Darstellungen für  $\sin(x-y)$  und  $\cos(x-y)$ .

5. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^3}{3x^2 - 2x^4}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^3}{x(x+2)}$

6. Sei  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ .

- (a) Ist  $f$  surjektiv?
- (b) Ist  $f$  in 0 hebbar stetig?

7. Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass es ein  $x \in [0, \pi/2]$  gibt mit  $f(x) = \frac{1}{3}$ . Ist dieses  $x$  eindeutig?
- (b) Was sind die Maxima und Minima von  $f$  und an welchen Stellen werden sie angenommen?