

Mathematik I WS 2012/13

6. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie anhand der bekannten Konvergenzkriterien, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{(2n+2)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{n-\frac{7}{2}}$

2. Bestimmen Sie anhand der bekannten Konvergenzkriterien, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{2n+1}}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-1}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{1}{\sqrt{4+1}} + \dots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 2n}{5^n}$

3. Bestimmen Sie anhand der bekannten Konvergenzkriterien, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\sqrt{n+4}}{4\sqrt{n}} \right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

4. Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

5. Welche der folgenden Funktionen sind gerade, welche sind ungerade? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(a) $f(x) = x \cdot |x|$

(b) $f(x) = x^n$

(c) $f(x) = x^2 + 3x - 1$

(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$

6. Man bestimme für die Funktion $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{6 - \sqrt{x}}}$

(a) den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Bildbereich, so dass f bijektiv ist, und ermitteln Sie die inverse Abbildung.

7. Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie, falls möglich, diese an. (Überprüfen Sie dieses Ergebnis durch Einsetzen!) Begründen Sie anderenfalls, warum keine solche Funktion existiert.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-4, \infty)$$

$$x \longmapsto 2x^4 - 4$$

$$g: [0, 1] \longrightarrow [-\sqrt{3}, -1]$$

$$x \longmapsto x - \sqrt{x^2 + 3}$$

$$h: (0, \infty) \longrightarrow [-4, \infty)$$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{x^2} + 3}$$