Mathematik I WS 2012/13
5. Übungsblatt

1. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = x + 1$.

   (b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, also $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

   $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

   gilt.

2. Stellen Sie für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fest, ob sie konvergent sind und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

   (a) $a_n = \frac{3n^2+n+4}{42n^2+17}$

   (b) $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}$

   (c) $a_n = \frac{7^n+(-3)^n}{7^n+(-5)^n}$

   (d) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$

3. Welche der nachstehenden Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt?

   (a) $a_n = (-1)^n n$

   (b) $a_n = \frac{5n^2+4n+1}{n^2+3n+2}$

   (c) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

   (d) $a_n = \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}$

4. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

   $$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$$

   definiert. Man berechne den Grenzwert der Folge für die Startwerte

   (a) $a_1 = 1$;

   (b) $a_1 = 3$;

   (c) $a_1 = 13$.

5. Eine Lösung ist w kg schwer und enthält c_0 kg Salz pro Kilogramm. Die Lösung wird zunächst mit p kg Wasser verdünnt und sodann wieder auf w kg abgegossen.

   (a) Wie groß ist der Salzgehalt der Lösung, falls der oben beschriebene Vorgang n-mal hintereinander wiederholt wird?

   (b) Wie groß ist die Gesamtmenge an Salz, die bei n-facher Wiederholung aus der insgesamt abgegossenen Lösung extrahiert werden kann?

   (c) Was passiert in (a) bzw. (b), wenn n sehr groß wird?

6. Es sollen n gleich große, übereinander gestapelte Bretter der Länge $2m$ nach einer Seite hin so weit wie möglich verschoben werden, ohne dass der Stapel umkippt. Man berechne über die Rechenregeln für Schwerpunkte die maximale Verschiebung s_n des obersten Brettes gegenüber dem untersten. Wird s_n für großes n beliebig groß oder ist die Reichweite der Bretter beschränkt?

7. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{(n^2+3n+4)2^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|(n+1)(n-2)+1|}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$