Mathematik I WS 2012/13
4. Übungsblatt

1. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie
   (a) $0\vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in V$.
   (b) Jeder Vektor $\vec{a}$ besitzt genau ein inverses Element.
   (c) Die Addition in V besitzt genau ein neutrales Element.

2. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
   (a) Zeigen Sie: Jeder Untervektorraum von V ist ebenfalls ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
   (b) Ist der Schnitt zweier Untervektorräume von V stets wieder ein Untervektorraum von V? Falls nein, unter welchen Bedingungen ist er ein Untervektorraum?
   (c) Ist die Vereinigung zweier Untervektorräume von V stets wieder ein Untervektorraum von V? Falls nein, unter welchen Bedingungen ist sie ein Untervektorraum?

3. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!
   (a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = a\}$ für $a \in \mathbb{R}$ konstant,
   (b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$,
   (c) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}$,
   (d) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \cap \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$.

4. Begründen Sie, dass die Menge
   $$U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$
   ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie eine Basis von U an.

5. Es sei
   $$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   Ist X eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Stellen Sie, falls möglich, die Standard-Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ als Linearkombinationen der Vektoren in X dar.

6. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraumes von $\mathbb{R}^4$, der von
   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$
   aufgespannt wird und geben Sie eine Basis an.

7. Bestimmen Sie die Dimension des Unterraumes von $\mathbb{R}^4$, der von
   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   aufgespannt wird und geben Sie eine Basis an.

8. Es sei $X = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

(a) Enthält $\langle X \rangle$ alle Standard-Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, dann ist X eine Basis. (Wie in $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{e}_i$ als der Vektor definiert, der aus einer 1 in der i-ten Komponente und Nullen in allen anderen Komponenten besteht.)

(b) Ist $\vec{x} \notin \langle X \rangle$, dann ist $X \cup \{x\}$ linear unabhängig.

(c) X ist Teilmenge einer Basis von $\mathbb{R}^n$.