Mathematik I WS 2012/13
15. Übungsblatt

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an!

(a) $\int_{-1}^{1} \ln|x| dx$

(b) $\int_{0}^{\infty} e^{-ax} dx$, mit $a > 0$

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an!

(a) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 3x)^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls ihren Wert an!

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$

4. Berechnen Sie eine Näherung für das Integral

$$\int_{1}^{2} \sqrt{x} dx$$

mit Hilfe der Trapezformel für $n = 1, 2, 3, 4$. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit dem tatsächlichen Wert des Integrals.

5. Berechnen Sie eine Näherung für das Integral

$$\int_{0}^{1} 2x^3 + x \, dx$$

mit Hilfe der Simpsonformel für $n = 2, 4, 6$. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit dem tatsächlichen Wert des Integrals.

6. Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Kugel mit Radius r sowie eines geraden Kreiskegels (die Spitze liegt über dem Mittelpunkt der Grundfläche) mit Höhe h und Radius r anhand der Formeln für Rotationskörper.

7. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x) = \ln(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ gegeben ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Gegeben sei eine Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Nun entfernen wir aus der Kugel alle Punkte, deren Abstand zur z-Achse weniger als r beträgt, wobei $r < R$ gilt. Berechnen Sie das Volumen des verbleibenden „Rings“. Welches bekannte andere Objekt hat genau das gleiche Volumen?