

Mathematik I WS 2012/13

10. Übungsblatt

1. Beweisen Sie die Summenformel für den Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x).$$

2. Beweisen Sie die in der Vorlesung erwähnten Identitäten

$$\operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).$$

3. Beweisen Sie die folgenden Ableitungen anhand der Definition der hyperbolischen Funktionen!

- (a) $(\sinh x)' = \cosh x$
- (b) $(\cosh x)' = \sinh x$
- (c) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- (d) $(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

4. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = \sinh(\operatorname{arcosh} x) \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

sowie ihre Funktionswerte an der Stelle $x = 2$. Was können Sie hieraus für die Differenzfunktion $f(x) - g(x)$ folgern?

5. Zeigen Sie für alle $x > 0$ die Ungleichung

$$\ln x + \frac{1}{x \cdot e} \geq 0.$$

Für welche x gilt Gleichheit?

6. Es sei $f(x) = \exp\left(\frac{|x^2 - 4|}{x + 2}\right)$. Bestimmen Sie den Bereich, in welchem f differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung an! Bestimmen Sie außerdem alle lokalen Maxima und Minima!
7. Es sei $f(x) = 2x^2\sqrt{1 - x^2}$. Geben Sie den Definitionsbereich von f an und bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima! Welche sind globale Extrema?
8. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ und finden Sie alle lokalen Maxima und Minima! Handelt es sich dabei auch um globale Extrema?