Übungen Mathematik I, M

Übungsblatt 2, Lösungen
(Stoff aus Mathematik 0)

16.10.2012

1. Berechnen Sie unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes

$$(-2x+3y)^7$$

Lösung: Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned}(-2x+3y)^7 =& \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(-2x)^k(3y)^{7-k}\\ =&(-2x)^7+7(-2x)^6(3y)^1+21(-2x)^5(3y)^2+35(-2x)^4(3y)^3\\ &+35(-2x)^3(3y)^4+21(-2x)^2(3y)^5+7(-2x)^1(3y)^6+(3y)^7\\ =&-128x^7+1344x^6y-6048x^5y^2+15120x^4y^3\\ &-22680x^3y^4+20412x^2y^5-10206xy^6+2187y^7.\end{aligned}$$

□

2. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

(a) $z^2 - z - 2 = (3z-14)i$

(b) $\dfrac{(1+2i)z+9}{(3+4i)z-(9+4i)} = 8-5i,$

(c) $z^6 = -1$

Lösung: (a) Zunächst bringen wir in der Gleichung alle Terme auf eine Seite:

$$z^2-(1+3i)z-(2-14i)=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$z=\frac{1+3i}{2}+\sqrt{\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2+(2-14i)},$$

wobei es in den komplexen Zahlen zwei Quadratwurzeln gibt. Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\sqrt{\frac{1+6i+9i^2}{4}+\frac{8-56i}{4}}\\ &=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\sqrt{\frac{-50i}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{5}{2}\sqrt{-2i}.\end{aligned}$$

Die Wurzeln aus $-2i$ sind $-1+i$ und $1-i$: Die Zahl $-2i$ hat Betrag 2 und Winkel $\frac{3}{2}\pi$ in der Polardarstellung, $-1+i$ und $1-i$ haben Betrag $\sqrt{2}$ und Winkel $\frac{3}{4}\pi$ beziehungsweise $\frac{7}{4}\pi$. Die Lösungen der Gleichung sind somit

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{5}{2}(-1+i) = -2+4i$$

und

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{5}{2}(1-i) = 3-i$$

(b) Wir multiplizieren die Gleichung mit dem Nenner der linken Seite und erhalten

$$\begin{aligned}(1+2i)z+9 &= (8-5i)((3+4i)z-(9+4i)) \\ &= (24+32i-15i-20i^2)z-(72+32i-45i-20i^2) \\ &= (44+17i)z-(92-13i).\end{aligned}$$

Achtung: Da wir hier mit einer Zahl multiplizieren, deren Wert wir noch nicht kennen, müssen wir am Ende unserer Berechnungen überprüfen, dass wir nicht mit 0 multipliziert haben. Nun bringen wir die Terme mit z auf eine Seite und die restlichen Terme auf die andere Seite.

$$(43+15i)z = 101-13i$$

Nun multiplizieren wir mit $43-15i$, um den Faktor vor z aufzulösen.

$$\begin{aligned}& & (43^2-15^2i^2)z &= (101-13i)(43-15i) \\ &\Leftrightarrow & 2074z &= 4148-2074i \\ &\Leftrightarrow & z &= 2-i\end{aligned}$$

Um sicherzustellen, dass $2-i$ tatsächlich die Lösung der Gleichung ist, müssen wir noch überprüfen, dass wir im ersten Schritt nicht mit 0 multipliziert haben. Multipliziert haben wir mit

$$\begin{aligned}(3+4i)z-(9+4i) &= (3+4i)(2-i)-(9+4i) \\ &= (10+5i)-(9+4i) = 1+i.\end{aligned}$$

Also haben wir nicht mit 0 multipliziert und $z = 2-i$ ist tatsächlich die Lösung der Gleichung.

(c) Die Zahl -1 hat Betrag 1 und Winkel π in der Polardarstellung. Ihre sechsten Wurzeln haben also ebenfalls Betrag 1 sowie Winkel $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{3}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{9}{6}\pi$ und $\frac{11}{6}\pi$. In der Standarddarstellung mit Real- und Imaginärteil ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & z_2 &= i \\ z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & z_4 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_5 &= -i & z_6 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

□

3. Ermitteln Sie jene Punktmenge in $\mathbb{C}$, die durch die Ungleichungen

$$z\bar{z} < 3(z + \bar{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

festgelegt wird und stellen Sie sie graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

Lösung: Schreiben wir $z = a + bi$, dann entsprechen die obigen Ungleichungen

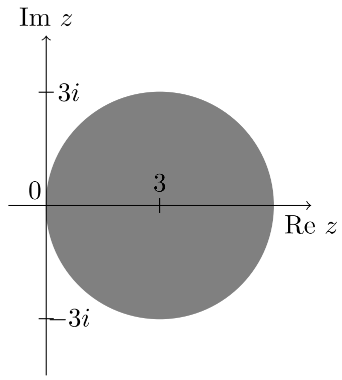
$$a^2 + b^2 < 6a \quad \text{und} \quad a > 0.$$

Die linke Ungleichung können wir umformen zu

$$\begin{aligned} & & a^2 - 6a + b^2 &< 0 \\ &\Leftrightarrow & a^2 - 6a + 9 + b^2 &< 9 \\ &\Leftrightarrow & (a-3)^2 + b^2 &< 9 \\ &\Leftrightarrow & |z-3|^2 &< 9. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung nur für Zahlen mit positivem Realteil erfüllt ist (für Realteil ≤ 0 ist bereits $(a-3)^2$ mindestens 9), beschreibt diese Ungleichung die gesuchte Punktmenge.

In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die Punktmenge allen Punkten mit Abstand kleiner 3 vom Punkt 3, also dem Inneren eines Kreises:



$\square$

4. Beweisen Sie für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m \geq k$:

(a)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

(b)
$$\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3} = (n-1)^2.$$

Lösung: (a) Die linke Seite der Gleichung entspricht

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!}.$$

Die rechte Seite ist

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!k!(m-k)!}.$$

Die beiden Seiten sind identisch, also ist die Gleichheit gezeigt.

Die Gleichheit lässt sich auch rein argumentativ zeigen: Die linke Seite entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten m auszuwählen und von diesen dann k auszuwählen. Die rechte Seite entspricht der Wahl von k Objekten sowie $m-k$ weiteren Objekten, also insgesamt werden m Objekte gewählt, von welchen k im ersten Schritt gewählt wurden. Also sind beide Seiten identisch.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3} &= \frac{(n+1)n(n-1)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \\ &= \frac{n^3-n}{6} - \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6} \\ &= \frac{6n^2-12n+6}{6} = n^2-2n+1 \\ &= (n-1)^2.\end{aligned}$$

□

5. Gegeben sind die vier Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch P_2, P_3 und P_4 in parameterfreier Form und berechnen Sie den Abstand des Punktes P_1 von dieser Ebene (inkl. Fußpunkt). Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_2P_3P_4$?

Lösung: Wir erhalten den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene, indem wir das Kreuzprodukt von $P_2 - P_4$ und $P_3 - P_4$ berechnen.

$$\vec{n} = (P_2 - P_4) \times (P_3 - P_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die parameterfreie Form der Ebenengleichung ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -2x + 3y - z = \text{const.}$$

Die Konstante erhalten wir, indem wir einen Punkt der Ebene, zum Beispiel P_2, einsetzen. Es ergibt sich der Wert $-2 \cdot 3 - 1 = -7$. Die Ebenengleichung lautet also

$$-2x + 3y - z = -7.$$

Um den Abstand von P_1 zur Ebene und den dazugehörigen Fußpunkt zu erhalten, betrachten wir die Gerade

$$P_1 + s\vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und berechnen ihren Schnittpunkt mit der Ebene, indem wir die Koordinaten in die Ebenengleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} & & -2(11-2s) + 3(-8+3s) - (3-s) &= -7 \\ &\Leftrightarrow & 14s - 49 &= -7 \\ &\Leftrightarrow & 14s &= 42 \\ &\Leftrightarrow & s &= 3 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist also

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

der Abstand von P_1 ist

$$\left| 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{14}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $P_2P_3P_4$ ist halb so groß wie der Betrag des Normalenvektors, also

$$\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

□

6. Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene F durch den Punkt

$$R = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und durch die Gerade

$$g : X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die beiden Ebenen E und F parameterfrei an!

(b) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E?

(c) In welchem Winkel schneidet die Gerade g die Ebene E?

(d) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F?

Lösung: (a) Für die Gleichung für Ebene E berechnen wir zunächst den Normalenvektor

$$\vec{n}_E = (P_1 - P_3) \times (P_2 - P_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 28 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

Für die Ebenengleichung können wir den Faktor 14 kürzen, die Gleichung ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -2x + 2y - z = \text{const.}$$

Setzen wir hier P_1 ein, ergibt sich $-2{\cdot}3+2{\cdot}2-5 = -7$, die Ebenengleichung für E lautet somit

$$-2x + 2y - z = -7.$$

Für F berechnen wir den Normalenvektor als Kreuzprodukt zweier Richtungsvektoren:

$$\vec{n}_F = \left(\begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 28 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir kürzen um den Faktor 2 und erhalten eine Ebenengleichung der Form

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 23x + 14y + 3z = \text{const.}$$

Setzen wir den Punkt R ein, ergibt sich $23 \cdot 13 + 14 \cdot (-10) + 3 \cdot 6 = 177$ und somit die Ebenengleichung

$$23x + 14y + 3z = 177.$$

(b) Wir setzen die Koordinaten der Gerade g in die Geradengleichung von E ein:

$$\begin{aligned} & -2(9+t) + 2(0-t) - (-10-3t) = -7 \\ \Leftrightarrow \quad & -t - 8 = -7 \\ \Leftrightarrow \quad & t = -1 \end{aligned}$$

Als Schnittpunkt erhalten wir also

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(c) Für den Winkel zwischen (dem Richtungsvektor von) g und dem Normalenvektor von E verwenden wir die Formel

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}_E}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot|\vec{n}_E|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28\\28\\-14\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-28\\28\\-14\end{pmatrix}\right|}\\ &= \frac{-14}{\sqrt{11}\cdot 42} = -\frac{1}{3\sqrt{11}}.\end{aligned}$$

Somit ist $\alpha = 95.768°$. Daher schneidet g die Ebene E im Winkel von $\alpha - 90° = 5.768°$.

(d) Der im Teil b berechnete Punkt $\begin{pmatrix}8\\1\\-7\end{pmatrix}$ liegt auf der Schnittgeraden. Wir müssen daher nur noch ihren Richtungsvektor berechnen.

Da die Schnittgerade in beiden Ebenen liegt, verläuft sie senkrecht zu beiden Normalenvektoren. Wir können den Richtungsvektor $\vec{v}$ also als Kreuzprodukt der (gekürzten) Normalvektoren erhalten:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}23\\14\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\-17\\-74\end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\1\\-7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}20\\-17\\-74\end{pmatrix}$$

□

7. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix}5\\-3\\z_A\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}6\\y_B\\3\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}x_D\\-2\\-4\end{pmatrix},$$

sind die Eckpunkte eines Parallelogramms, das in der Ebene $\varepsilon : x - y + z = 10$ liegt. Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte A, B, D sowie die Koordinaten des Punktes C. Errichten Sie über dem Parallelogramm als Grundfläche eine gerade Pyramide von der Höhe $h = 4\sqrt{3}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S (zwei Lösungen!) und das Volumen der Pyramide!

Lösung: Um die fehlenden Koordinaten zu berechnen, setzen wir die Punkte A, B, D in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} && 5-(-3)+z_A &= 10\\ \Leftrightarrow && z_A &= 2\\ && 6-y_B+3 &= 10\\ \Leftrightarrow && y_B &= -1\\ && x_D-(-2)+(-4) &= 10\\ \Leftrightarrow && x_D &= 12\end{aligned}$$

Der Punkt C berechnet sich als

$$C = B + D - A = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Für die Pyramide benötigen wir zunächst den Mittelpunkt M des Parallelogramms.

$$M = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Spitze ergibt sich als

$$S_{1,2} = M \pm 4\sqrt{3} \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die beiden Spitzen sind also

$$S_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -\frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Grundfläche der Pyramide hat den Flächeninhalt

$$|(B - A) \times (D - A)| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix} \right| = 13\sqrt{3}.$$

Das Volumen der Pyramide ist ein Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe, also ist das Volumen

$$\frac{1}{3} 13\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 52.$$

$\square$