Übungen Mathematik I, M

Nachklausur zur Klausur 2, Lösungen

28.2.2013

1. Zu der Funktion
$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 6}$$
bestimme man
   (a) alle Asymptoten;
   (b) alle Wendepunkte, das heißt, alle Extremalstellen der Ableitung von f.

Lösung: (a) Die Funktion konvergiert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gegen 1, also ist $y = 1$ eine Asymptote. Da es keine Definitionslücken gibt, existieren keine weiteren Asymptoten.

(b) Die Ableitung von f ist
$$f'(x) = \frac{2x(x^2+6) - 2x(x^2-3)}{(x^2+6)^2} = \frac{18x}{(x^2+6)^2}.$$
Für die Extremalstellen von f' müssen wir die Ableitung von f' betrachten, also f''.
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{18(x^2+6)^2 - 2(x^2+6)2x \cdot 18x}{(x^2+6)^4} \\ &= \frac{18(x^2+6) - 72x^2}{(x^2+6)^3} = \frac{-54x^2 + 108}{(x^2+6)^3} \end{aligned}$$
Diese Funktion ist 0 genau dann, wenn der Zähler 0 ist, also für $x^2 = 2$. Um zu überprüfen, ob die Stellen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$ tatsächlich Extremalstellen von f' sind, kann man entweder f''' berechnen und die beiden Stellen einsetzen oder man argumentiert wie folgt: Für x zwischen x_1 und x_2, also $|x| < \sqrt{2}$, ist $54x^2 < 108$ und somit $f''(x)$ positiv (der Nenner von $f''(x)$ ist immer positiv). Für $x < x_1$ und $x > x_2$, also $|x| > \sqrt{2}$, ist entsprechend $f''(x)$ negativ. Also ist f' links von x_1 monoton fallend, zwischen x_1 und x_2 monoton steigend und rechts von x_2 wieder monoton fallend. Damit ist x_1 eine Minimalstelle von f' und x_2 eine Maximalstelle. □

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von
$$\frac{4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 13x + 7}{x^3 - x^2 - x - 2}.$$

Lösung: Zunächst führen wir eine Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\big(& 4x^4 - 2x^3 & - 2x^2 & - 13x & + 7\big) & : \big(x^3 - x^2 - x - 2\big) = 4x + 2 + \dfrac{4x^2 - 3x + 11}{x^3 - x^2 - x - 2} \\
& -4x^4 + 4x^3 & + 4x^2 & + 8x & & \\
\hline
& 2x^3 & + 2x^2 & - 5x & + 7 & \\
& -2x^3 & + 2x^2 & + 2x & + 4 & \\
\hline
& & 4x^2 & - 3x & + 11 &
\end{array}
$$

Nun wollen wir den verbleibenden Bruch zerlegen. Eine Nullstelle des Nenners ist 2, wir können daher einen Faktor $x - 2$ heraus ziehen.

$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(& x^3 & - x^2 & - x - 2\big) & : \big(x - 2\big) = x^2 + x + 1 \\
& -x^3 & + 2x^2 & & \\
\hline
& & x^2 & - x & \\
& & -x^2 & + 2x & \\
\hline
& & & x - 2 & \\
& & & -x + 2 & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}
$$

Der Faktor x^2+x+1 hat keine reellen Nullstellen (denn der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ unter der Wurzel in der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist $-\frac{3}{4}$, also negativ), wir haben den Nenner also in $(x-2)(x^2+x+1)$ zerlegt. Für die Partialbruchzerlegung suchen wir nun Zahlen A, B, C mit

$$\frac{4x^2 - 3x + 11}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Multiplizieren wir mit dem Nenner der linken Seite, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
4x^2 - 3x + 11 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 2) \\
&= Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\
&= (A + B)x^2 + (A - 2B + C)x + (A - 2C).
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert uns die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A + B &= 4, \\
A - 2B + C &= -3, \\
A - 2C &= 11.
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichung bedeutet $B = 4 - A$. In die zweite Gleichung eingesetzt, ergibt dies $A - 2(4 - A) + C = -3$ beziehungsweise $3A + C = 5$. Addieren wir das Doppelte dieser Gleichung zur dritten Gleichung, haben wir $7A = 21$, also $A = 3$. Daraus folgt $B = 4 - A = 1$ und $C = 5 - 3A = -4$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 13x + 7}{x^3 - x^2 - x - 2} = 4x + 2 + \frac{3}{x-2} + \frac{x - 4}{x^2 + x + 1}.$$

□

3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)}$

(b) $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{x}{1-e^x}}$

Lösung: (a) Der Zähler konvergiert gegen $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$ und der Nenner ebenfalls gegen $0 - 0 = 0$. Wir wenden daher l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)e^{\sin(x)}}{1 - \cos(x)}$$

Auch hier konvergiert wieder der Zähler gegen $e^0 - 1 \cdot e^0 = 1 - 1 = 0$ und der Nenner ebenfalls gegen $1 - 1 = 0$. Wir wenden erneut l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)e^{\sin(x)}}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x)e^{\sin(x)} - \cos^2(x)e^{\sin(x)}}{\sin(x)}$$

Der Zähler konvergiert gegen $e^0 + 0 \cdot e^0 - 1^2 e^0 = 1 + 0 - 1 = 0$. Auch der Nenner konvergiert gegen 0, wir wenden also ein weiteres Mal l'Hospital an:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin(x)e^{\sin(x)} - \cos^2(x)e^{\sin(x)}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x)e^{\sin(x)} + \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)} + 2\cos(x)\sin(x)e^{\sin(x)} - \cos^3(x)e^{\sin(x)}}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos(x)e^{\sin(x)} + 3\cos(x)\sin(x)e^{\sin(x)} - \cos^3(x)e^{\sin(x)}}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

Nun konvergiert der Zähler gegen $e^0 + 1 \cdot e^0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot e^0 - 1^3 e^0 = 1 + 1 + 0 - 1 = 1$ und auch der Nenner konvergiert gegen 1. Also ist der gesuchte Grenzwert 1.

(b) Es ist

$$\lim_{x\to 0} 2^{\frac{x}{1-e^x}} = 2^{\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x}}.$$

Nenner und Zähler des Bruches konvergieren gegen 0, wir wenden also l'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-e^x} = -1$$

Der gesuchte Grenzwert ist also $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

□

4. Lösen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int x \cosh(x) dx$

(b) $\int \frac{5}{3\sin(x) + 4\cos(x)} dx$

Lösung: (a) Wir wenden partielle Integration an.

$$\int x\cosh(x)dx = x\sinh(x) - \int \sinh(x)dx = x\sinh(x) - \cosh(x) + C.$$

(b) Wir verwenden die Standardsubstitution $u = \tan(\frac{x}{2})$, also $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{3\sin(x)+4\cos(x)}dx &= \int \frac{5}{3\frac{2u}{1+u^2}+4\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du \\ &= \int \frac{10}{6u+4-4u^2}du \\ &= -\frac{5}{2}\int \frac{1}{u^2-\frac{3}{2}u-1}du\end{aligned}$$

Den Nenner können wir zerlegen in $(u-2)(u+\frac{1}{2})$, wir erhalten also

$$\int \frac{5}{3\sin(x)+4\cos(x)}dx = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{(u-2)(u+\frac{1}{2})}du.$$

Nun zerlegen wir den Integranden in zwei Brüche. Wir suchen also Zahlen A und B mit

$$\frac{1}{(u-2)(u+\frac{1}{2})} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+\frac{1}{2}},$$

also

$$1 = A\left(u+\frac{1}{2}\right) + B(u-2).$$

Setzen wir hier $u = 2$ ein, erhalten wir $1 = \frac{5}{2}A$, also $A = \frac{2}{5}$. Setzen wir $u = -\frac{1}{2}$ ein, erhalten wir $1 = -\frac{5}{2}B$, also $B = -\frac{2}{5}$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{3\sin(x)+4\cos(x)}dx &= -\frac{5}{2}\int \left(-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{u-2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{u+\frac{1}{2}}\right)du \\ &= \int \frac{1}{u-2}du - \int \frac{1}{u+\frac{1}{2}}du \\ &= \ln(u-2) - \ln\left(u+\frac{1}{2}\right) + C \\ &= \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-2\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

□