Übungen Mathematik I, M

Klausur 2, Lösungen
(Gruppe B)

25.1.2013

1. An welchen Stellen im Intervall $[-6, 6]$ nimmt die Funktion $f(x) = x\sqrt{x+6}$ ihren größten und ihren kleinsten Funktionswert an? Bestimmen Sie außerdem alle weiteren Stellen in $[-6, 6]$, an denen lokale Extrema vorliegen.

   Lösung: Zunächst bestimmen wir die Ableitung von f. Nach der Produktregel ist

   $$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+6} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+6}} = \sqrt{x+6} + \frac{x}{2\sqrt{x+6}}.$$

   Die Nullstellen der Ableitung sind Kandidaten für Extremstellen. Die Ableitung ist genau dann Null, wenn

   $$\begin{aligned} & \sqrt{x+6} + \frac{x}{2\sqrt{x+6}} = 0 \\ \iff \quad & \frac{x}{2\sqrt{x+6}} = -\sqrt{x+6} \\ \iff \quad & x = -2(x+6) \\ \iff \quad & 3x = -12 \\ \iff \quad & x = -4 \end{aligned}$$

   Starten wir mit $f'(x) < 0$ beziehungsweise $f'(x) > 0$, erhalten wir entsprechend $x < -4$ beziehungsweise $x > -4$. Daher ist f im Intervall $[-6, -4]$ streng monoton fallend und im Intervall $[-4, 6]$ streng monoton steigend, also liegt an der Stelle -4 ein lokales Minimum und an beiden Randpunkten -6 und 6 ein lokales Maximum. Dies sind alle Extremstellen. Um zu bestimmen, wo das globale Maximum und Minimum liegen, berechnen wir die Funktionswerte an den drei Stellen. Es ist

   $$f(-6) = 0, \qquad f(-4) = -4\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad f(6) = 6\sqrt{12}.$$

   Also liegt bei -4 das globale Minimum (dies war bereits vor Angabe der Funktionswerte klar, weil das einzige lokale Minimum auf einem kompakten Intervall auch das globale Minimum sein muss) und bei 6 das globale Maximum. Das Maximum an der Stelle -6 ist nur lokal. □

2. Berechnen Sie

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x - 5 + \frac{1}{x} - 3\ln(x)}{x - \ln(x) - 1}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sin(2x)}\right)$

Lösung: (a) Sowohl der Zähler als auch der Nenner konvergieren gegen 0, wir können also die Regel von l'Hospital anwenden. Es ist

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-5+\frac{1}{x}-3\ln(x)}{x-\ln(x)-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Es konvergieren weiterhin sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null, wir wenden daher l'Hospital ein weiteres Mal an.

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-5+\frac{1}{x}-3\ln(x)}{x-\ln(x)-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{2+3}{1}=5$$

(b) Sowohl $\frac{1}{x}$ als auch $\frac{2}{\sin(2x)}$ konvergieren gegen ∞. Bevor wir den Grenzwert bestimmen können, sollten wir die beiden Ausdrücke zusammenfassen. Dazu bringen wir sie auf den gleichen Nenner.

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{\sin(2x)}=\frac{\sin(2x)-2x}{x\cdot\sin(2x)}$$

Zähler und Nenner konvergieren beide gegen 0, wir wenden also l'Hospital an.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sin(2x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x}{x\cdot\sin(2x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2}{\sin(2x)+x\cdot 2\cos(2x)}\end{aligned}$$

Erneut konvergieren Zähler und Nenner beide gegen 0, wir wenden l'Hospital ein zweites Mal an.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{\sin(2x)}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin(2x)}{2\cos(2x)+2\cos(2x)-x\cdot 4\sin(2x)}\\&=\frac{0}{2+2+0}=0\end{aligned}$$

□

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=2^x$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0=0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Lösung: Die Ableitung von f ist

$$f'(x)=\ln(2)\cdot 2^x,$$

die zweite Ableitung ist

$$f''(x)=\ln(2)^2\cdot 2^x,$$

die dritte Ableitung ist

$$f'''(x)=\ln(2)^3\cdot 2^x$$

und so weiter. Allgemein ist also

$$f^{(n)}(x) = \ln(2)^n \cdot 2^x.$$

Die Taylorreihe ergibt sich somit als

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2)^n}{n!} x^n.$$

Der Konvergenzradius ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(2)^n}{n!}}{\frac{\ln(2)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\ln(2)} \right| = \infty.$$

Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$. □

4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale!

   (a) $\displaystyle\int x\cos(x)dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

Lösung: (a) Wir wenden partielle Integration mit $f'(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x$ an. Somit ist $f(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)dx &= x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) - \big(-\cos(x)\big) + C \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C\end{aligned}$$

(b) Wir ermitteln die Partialbruchzerlegung des Integranden. Der Faktor x^2+1 im Nenner hat keine reellen Nullstellen und kann daher nicht weiter zerlegt werden. Gesucht sind also A, B, C mit

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Multiplizieren wir mit dem Nenner der linken Seite, ergibt sich

$$\begin{aligned}x^2-2x-1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \\ &= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx + C \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C).\end{aligned}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}A+B &= 1 \\ B+C &= -2 \\ A+C &= -1.\end{aligned}$$

Addieren wir die erste und zweite Gleichung und ziehen die dritte Gleichung ab, folgt

$$\begin{aligned} & (A+B)+(B+C)-(A+C) = 1+(-2)-(-1) \\ \iff & \quad 2B = 0 \\ \iff & \quad B = 0. \end{aligned}$$

Mit der ersten Gleichung erhalten wir damit $A = 1 - B = 1$ und mit der zweiten Gleichung $C = -2 - B = -2$.
Es ist also

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx. \end{aligned}$$

Beim linken Integral in der letzten Zeile ist der Zähler die Ableitung des Nenners, weshalb das Integral dem Logarithmus des (Betrags des) Nenners entspricht. Das rechte Integral ist bekannt. Es ist also

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \ln|x+1| - 2\arctan(x) + C. \qquad \square$$