Übungen Mathematik I, M

Klausur 2, Lösungen
(Gruppe A)

25.1.2013

1. An welchen Stellen im Intervall $[-3,3]$ nimmt die Funktion $f(x) = x\sqrt{x+3}$ ihren größten und ihren kleinsten Funktionswert an? Bestimmen Sie außerdem alle weiteren Stellen in $[-3,3]$, an denen lokale Extrema vorliegen.

   Lösung: Zunächst bestimmen wir die Ableitung von f. Nach der Produktregel ist

   $$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}.$$

   Die Nullstellen der Ableitung sind Kandidaten für Extremstellen. Die Ableitung ist genau dann Null, wenn

   $$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = -\sqrt{x+3} \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -2(x+3) \\ \Longleftrightarrow \quad & 3x = -6 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -2 \end{aligned}$$

   Starten wir mit $f'(x) < 0$ beziehungsweise $f'(x) > 0$, erhalten wir entsprechend $x < -2$ beziehungsweise $x > -2$. Daher ist f im Intervall $[-3,-2]$ streng monoton fallend und im Intervall $[-2,3]$ streng monoton steigend, also liegt an der Stelle -2 ein lokales Minimum und an beiden Randpunkten -3 und 3 ein lokales Maximum. Dies sind alle Extremstellen. Um zu bestimmen, wo das globale Maximum und Minimum liegen, berechnen wir die Funktionswerte an den drei Stellen. Es ist

   $$f(-3) = 0, \qquad f(-2) = -2 \qquad \text{und} \qquad f(3) = 3\sqrt{6}.$$

   Also liegt bei -2 das globale Minimum (dies war bereits vor Angabe der Funktionswerte klar, weil das einzige lokale Minimum auf einem kompakten Intervall auch das globale Minimum sein muss) und bei 3 das globale Maximum. Das Maximum an der Stelle -3 ist nur lokal. $\square$

2. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x - 4 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)}{1 - x + \ln(x)}$

(b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{\sin(3x)}\right)$

Lösung: (a) Sowohl der Zähler als auch der Nenner konvergieren gegen 0, wir können also die Regel von l'Hospital anwenden. Es ist

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-4+\frac{1}{x}-2\ln(x)}{1-x+\ln(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{3-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}{-1+\frac{1}{x}}.$$

Es konvergieren weiterhin sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null, wir wenden daher l'Hospital ein weiteres Mal an.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-4+\frac{1}{x}-2\ln(x)}{1-x+\ln(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+2}{-1} = -4$$

(b) Sowohl $\frac{1}{x}$ als auch $\frac{3}{\sin(3x)}$ konvergieren gegen ∞. Bevor wir den Grenzwert bestimmen können, sollten wir die beiden Ausdrücke zusammenfassen. Dazu bringen wir sie auf den gleichen Nenner.

$$\frac{1}{x} - \frac{3}{\sin(3x)} = \frac{\sin(3x)-3x}{x\cdot\sin(3x)}$$

Zähler und Nenner konvergieren beide gegen 0, wir wenden also l'Hospital an.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{\sin(3x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-3x}{x\cdot\sin(3x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)-3}{\sin(3x)+x\cdot 3\cos(3x)}\end{aligned}$$

Erneut konvergieren Zähler und Nenner beide gegen 0, wir wenden l'Hospital ein zweites Mal an.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{\sin(3x)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{-9\sin(3x)}{3\cos(3x)+3\cos(3x)-x\cdot 9\sin(3x)}\\ &= \frac{0}{3+3+0} = 0\end{aligned}$$ □

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = 3^x$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Lösung: Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \ln(3)\cdot 3^x,$$

die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = \ln(3)^2\cdot 3^x,$$

die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = \ln(3)^3\cdot 3^x$$

und so weiter. Allgemein ist also

$$f^{(n)}(x) = \ln(3)^n \cdot 3^x.$$

Die Taylorreihe ergibt sich somit als

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(3)^n}{n!} x^n.$$

Der Konvergenzradius ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\ln(3)^n}{n!}}{\frac{\ln(3)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\ln(3)} \right| = \infty.$$

Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$. □

4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale!

   (a) $\displaystyle\int x \sin(x) dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x^2+1)} dx$

Lösung: (a) Wir wenden partielle Integration mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ an. Somit ist $f(x) = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= x \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int \big(-\cos(x)\big) dx \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x) dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C \end{aligned}$$

(b) Wir ermitteln die Partialbruchzerlegung des Integranden. Der Faktor $x^2 + 1$ im Nenner hat keine reellen Nullstellen und kann daher nicht weiter zerlegt werden. Gesucht sind also A, B, C mit

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2+1}.$$

Multiplizieren wir mit dem Nenner der linken Seite, ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(x^2+1) + (Bx + C)(x+1) \\ &= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx + C \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C). \end{aligned}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ B + C &= 2 \\ A + C &= -1. \end{aligned}$$

Addieren wir die erste und zweite Gleichung und ziehen die dritte Gleichung ab, folgt

$$\begin{aligned}
& (A+B)+(B+C)-(A+C) = 1+2-(-1) \\
\Longleftrightarrow \quad & 2B = 4 \\
\Longleftrightarrow \quad & B = 2.
\end{aligned}$$

Mit der ersten Gleichung erhalten wir damit $A = 1 - B = -1$ und mit der zweiten Gleichung $C = 2 - B = 0$.
Es ist also

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\
&= -\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx.
\end{aligned}$$

Bei beiden Integralen in der letzten Zeile ist der Zähler die Ableitung des Nenners, weshalb das Integral dem Logarithmus des (Betrags des) Nenners entspricht. Also

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx = -\ln|x+1| + \ln|x^2+1| + C.$$

(Die Betragstriche bei $\ln|x^2+1|$ können wir auch weglassen, da x^2+1 ohnehin positiv ist.) $\square$