Übungen Mathematik I, M

Klausur 1, Lösungen
(Gruppe A)

23.11.2012

1. Gegeben seien die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei ε_1 die Ebene, die durch A, B und C aufgespannt wird, sowie ε_2 die Ebene, die durch A, B und D aufgespannt wird.

(a) Welchen Abstand hat D zu ε_1?

(b) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen!

(c) In welchem Winkel schneidet die Gerade durch A und D die Ebene ε_1?

Lösung: (a) Zunächst müssen wir den Normalenvektor von ε_1 berechnen. Dieser ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von $B - A$ und $C - A$.

$$(B - A) \times (C - A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da es beim Normalenvektor nur auf die Richtung ankommt, können wir mit 2 kürzen und den Normalenvektor als $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen. Die parameterfreie Ebenengleichung für ε_1 ist durch $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot A$ gegeben, also $-2x + z = -5$.

Wir betrachten nun die Gerade $D + t\vec{n}$, welche von D senkrecht zu ε_1 verläuft. Ihr Schnittpunkt mit ε_1 ist der Punkt auf ε_1 mit kleinstem Abstand von D. Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzen wir die Koordinaten der Gerade in die Ebenengleichung ein. Die einzelnen Koordinaten der Gerade sehen wie folgt aus:

$$\vec{x} = D + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir in die Ebenengleichung ein und berechnen t.

$$\begin{aligned} & & -2(1-2t)+t &= -5 \\ \iff & & 5t &= -3 \\ \iff & & t &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Der Abstand von D zu ε_1 ist somit

$$|t\vec{n}| = \frac{3}{5}\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2} = \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

(b) Da die beiden Ebenen sowohl A als auch B enthalten, liegen beide Punkte auf der Schnittgeraden. Also ist die Schnittgerade die Gerade durch A und B:

$$\vec{x} = A + s(B-A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 2 \\ -3+2s \end{pmatrix}.$$

Wer diesen Zusammenhang in der Klausur nicht gesehen hat, konnte die Schnittgerade auch wie folgt berechnen: Die Ebene ε_2 ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{x} &= A + s(B-A) + t(D-A) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 2-2t \\ -3+2s+3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmt. In die Gleichung von ε_1 eingesetzt, ergibt dies

$$\begin{aligned} & & -2(1+s)+(-3+2s+3t) &= -5 \\ \iff & & 3t-5 &= -5 \\ \iff & & t &= 0. \end{aligned}$$

Die Schnittgerade entspricht also allen Punkten auf ε_2 mit $t=0$ in der obigen Ebenengleichung, also alle $\vec{x}$ mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 2 \\ -3+2s \end{pmatrix}.$$

(c) Für den Winkel zwischen der Geraden durch A und D und der Ebene ε_1 bestimmen wir zuerst den Winkel φ zwischen der Geraden und dem Normalenvektor von ε_1. Für diesen gilt

$$\cos\varphi = \frac{(D-A)\cdot\vec{n}}{|D-A|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{65}}$$

und somit

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{65}} \approx 68.155°.$$

Der Winkel zwischen der Geraden und der Ebene ist

$$90° - \varphi \approx 21.845°. \qquad \square$$

2. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{z^3 + (i-1)z^2 - 1}{z^2 + (i-1)z - i} = \frac{z^2 + z + 1}{z+1}.$$

Lösung: Zuerst multiplizieren wir die Gleichung mit beiden Nennern. Hierdurch ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (z^3 + (i-1)z^2 - 1)(z+1) = (z^2 + z + 1)(z^2 + (i-1)z - i) \\
\iff\ & z^4 + iz^3 + (i-1)z^2 - z - 1 = z^4 + iz^3 - z - i \\
\iff\ & (i-1)z^2 - 1 = -i \\
\iff\ & (i-1)z^2 = 1 - i \\
\iff\ & z^2 = -1.
\end{aligned}$$

Die beiden komplexen Zahlen, die dies erfüllen, sind $z_1 = i$ und $z_2 = -i$. Da wir allerdings im ersten Schritt mit den Nennern multipliziert haben, müssen wir für beide Lösungen noch überprüfen, ob dies eine Multiplikation mit Null war. Nullstelle des Nenners auf der rechten Seite der Gleichung ist offenbar keine der beiden Lösungen. Einsetzen in den Nenner der linken Seite der Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
& i^2 + (i-1)i - i = -1 + (-1-i) - i = -2 - 2i \\
\text{und} \quad & (-i)^2 + (i-1)(-i) - i = -1 + (1+i) - i = 0.
\end{aligned}$$

Da $z_2 = -i$ eine Nullstelle dieses Nenners ist, ist z_2 keine Lösung der Gleichung. Hingegen ist z_1 keine Nullstelle. Die einzige Lösung der Gleichung ist also $z_1 = i$. $\square$

3. Überprüfen Sie die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n + (-1)^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!3^n(n-1)!}{(2n-1)!}$$

auf Konvergenz.

Lösung: Wir betrachten zuerst die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+(-1)^n}$. Der Zähler ist Null für ungerades n (denn der Cosinus ist Null an den Stellen $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$). Die Reihe entspricht also der Reihe, die nur aus den Summanden mit geradem Index besteht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n + (-1)^n} = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n + (-1)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{2k\pi}{2})}{4k + (-1)^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{4k+1}$$

Da $\cos(k\pi) = (-1)^k$ ist, haben wir wechselnde Vorzeichen. Die Folge $\left(\frac{1}{4k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und somit sagt das Leibniz-Kriterium, dass die Reihe konvergiert.

Für die zweite Reihe verwenden wir das Quotientenkriterium. Der $(n+1)$-te Summand geteilt durch den n-ten Summanden ist

$$\frac{\frac{(n+2)!3^{n+1}n!}{(2n+1)!}}{\frac{(n+1)!3^n(n-1)!}{(2n-1)!}} = \frac{(n+2)!3^{n+1}n!(2n-1)!}{(n+1)!3^n(n-1)!(2n+1)!}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot 3\cdot n}{2n(2n+1)} = \frac{3n^2+6n}{4n^2+2n}$$

$$= \frac{3+\frac{6}{n}}{4+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4}.$$

Da die Quotienten gegen $\frac{3}{4}$ konvergieren, sind sie für jedes q zwischen 1 und $\frac{3}{4}$ (zum Beispiel $q=\frac{4}{5}$) für genügend großes n kleiner als q. Daher sagt uns das Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert. □

4. Zu der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+4}$$

bestimme man

(a) den größtmöglichen Definitionsbereich D und

(b) alle $y \in \mathbb{R}$, für die ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert.

Lösung: 1. Die Funktion f ist genau dort nicht definiert, wo der Nenner Null ist. Die Nullstellen des Nenners ergeben sich als

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2},$$

also $x_1 = 4$ und $x_2 = 1$. Der größtmögliche Definitionsbereich ist daher $D = \mathbb{R} \setminus \{1,4\}$.

2. Wir suchen alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ für ein $x \in D$. Für $x \in D$ ist

$$f(x) = \frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+4} = \frac{2(x^2-5x+4)+3x-3}{x^2-5x+4} = 2 + \frac{3(x-1)}{x^2-5x+4}.$$

Da 1 und 4 die Nullstellen des Nenners sind, können wir ihn als $(x-1)(x-4)$ schreiben. Dadurch ergibt sich

$$f(x) = 2 + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = 2 + \frac{3}{x-4}.$$

Der Nenner $x-4$ nimmt für $x \in D$ alle reellen Werte außer $4-4=0$ (da $4 \notin D$) und $1-4=-3$ (da $1 \notin D$) an. Somit nimmt $\frac{3}{x-4}$ alle Werte außer 0 (da der Zähler nicht Null ist) und $\frac{3}{-3} = -1$ (da der Nenner nie -3 ist) an. Also nimmt f alle Werte außer $2 = 2+0$ und $1 = 2-1$ an. □