Formelsammlung, Klausur 2

Mathematik I, M, Übungen

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Wichtige Ableitungen

$$(x^a)' = ax^{a-1}, a \in \mathbb{R} \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad (\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1} \qquad (\operatorname{arccot}(x))' = \frac{-1}{x^2+1}$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad (\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$$

$$(\operatorname{arsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (\operatorname{arcosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{artanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$(\operatorname{arcoth}(x))' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{für } |x| > 1$$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Ist die Ableitung an einer Stelle 0 und die zweite Ableitung negativ, liegt eine Maximalstelle vor. Ist die Ableitung 0 und die zweite Ableitung positiv, liegt eine Minimalstelle vor.

Monotonie:

Gilt auf (a,b)	dann ist f auf $[a,b]$
$f'(x) \geq 0$,	monoton steigend
$f'(x) > 0$,	streng monoton steigend
$f'(x) \leq 0$,	monoton fallend
$f'(x) < 0$,	streng monoton fallend

Asymptoten: Konvergiert $\frac{f(x)}{x}$ sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$ gegen einen Wert k und konvergiert $f(x) - kx$ in beiden Richtungen gegen d, dann ist $kx + d$ eine Asymptote von f.

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \to a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞, dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylorreihen und -polynome

Taylorpolynom vom Grad n um x_0:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe um x_0:

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle x mit $|x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Wichtige Integrale

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^a, $(a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$

Integrationsregeln

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Substitution: Setzen wir $x = g(u)$, dann ist

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)du.$$

Insbesondere

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Standardsubstitution bei trigonometrischen Funktionen:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$