Übungen Mathematik II, M

9. Übungsblatt

6.6.2013

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in einem allgemeinen Punkt (x_0, y_0). An welchen Punkten ist die Tangentialebene parallel zu der Ebene $\mathcal{E}\colon z = 3x + 3y$ beziehungsweise zur x,y-Ebene?

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = ye^x - y + x$ in einem allgemeinen Punkt (x_0, y_0) und ermitteln Sie den Punkt, an welchem die Tangentialebene parallel zur x,y-Ebene ist. Zeigen Sie, ohne die Hesse-Matrix zu berechnen, dass an diesem Punkt kein lokales Extremum liegt.

3. Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z) = x^3z + \cos(yz^2) + x^2 + y^3 + z$ im Punkt $P = (1,1,0)$. Welches ist die Richtung des maximalen Anstieges von P aus? Für welche Richtungen ist die Richtungsableitung 0?

4. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \ln(xy^2) + xy$ am Punkt $P = (1,1,0)$ in Richtung der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x,y) = \cos(xy)$ und skizzieren Sie das Gradientenfeld und die Niveaulinien.

6. Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 3x^2z$. Bestimmen Sie alle Punkte, an welchen der Gradient Null ist.

7. Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ z \\ xyz \end{pmatrix}.$$

An welchen Stellen im $\mathbb{R}^3$ liegen Quellen und wo liegen Senken?

8. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz + ax^2 \\ xz - a^2z \\ xy - 4y - az^2 \end{pmatrix}$$

quellenfrei, für welche ist es wirbelfrei?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$. Wir schreiben die Funktion in Polarkoordinaten um, setzen also $g(r, \varphi) = f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$. Zeigen Sie, dass für die partiellen Ableitungen die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2$$

gilt.