Übungen Mathematik II, M

8. Übungsblatt

23.5.2013

1. Gegeben sei die Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Welche Strecke legt der Punkt von $t = 0$ bis $t = \infty$ zurück? Wenn am Punkt $(1, 0, 1)^t$ die Bogenlänge $s = 0$ ist, an welchem Punkt ist die Bogenlänge -42?

2. Gegeben sei die Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ \sin(t) \\ \sqrt{1-a^2}\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } |a| < 1.$$

Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein und bestimmen Sie das begleitende Dreibein in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

3. Bestimmen Sie das begleitende Dreibein der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+2 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie die Torsion und Krümmung der Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

An welchen Punkten sind Torsion beziehungsweise Krümmung maximal?

5. Gegeben sei die Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen sie die Torsion zweimal: Einmal in Abhängigkeit von der Zeit, einmal in Abhängigkeit von der Bogenlänge s. Für letzteres können Sie die im Tutorium berechneten Vektoren des begleitenden Dreibeines verwenden:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+s^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{s}{\sqrt{2+s^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2+s^2}} \\ -\frac{s}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}$$

6. Geben Sie die Niveaulinien der folgenden Funktionen an und skizzieren Sie diese.

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$, wobei $|x| > |y|$.

(b) $g(x,y) = e^{x^2+y^2}$

(c) $h(x,y) = \cos(x+y)$

7. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y im Punkt $(0,0)$.

8. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene

(a) von $f(x,y) = xy^2 e^{x+y}$ im Punkt $(2,-2)$ und

(b) von $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ im Punkt $(0,0)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Eine Oberfläche sei durch die Funktion $z = x^2 + xy + 2y^2$ gegeben. Ein Punkt bewegt sich auf dieser Oberfläche, wobei er auf der (x,y)-Ebene einen Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,0)$ beschreibt, den er im Zeitraum $[0, 2\pi]$ mit konstanter Geschwindigkeit umrundet. Was ist die Steigrate dieses Punktes, also die Höhenänderung pro Zeit?