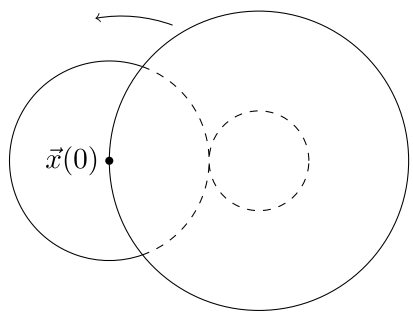
Übungen Mathematik II, M

7. Übungsblatt

16.5.2013

1. Ein Rad vom Radius 1 ist an einer Achse vom Radius $\frac{1}{3}$ befestigt. Die Achse rollt an einem Kreis vom Radius $\frac{2}{3}$ ab. Dabei beschreibt ein Punkt $\vec{x}$ am Rand des Rades die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - \cos(2t) \\ \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}.$$



Skizzieren Sie die Kurve und bestimmen Sie alle Zeitpunkte $t \in [0, 2\pi]$, an welchen sich der Punkt

(a) in horizontaler Richtung,
(b) in vertikaler Richtung oder
(c) gar nicht bewegt.

2. Skizzieren Sie die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

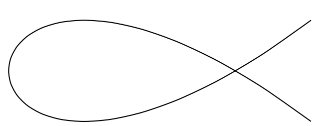
und bestimmen Sie alle Zeitpunkte $t \in [0, 2\pi]$, an welchen sich der Punkt

(a) in horizontaler Richtung,
(b) in vertikaler Richtung oder
(c) gar nicht bewegt.

3. Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t - \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

bildet ein Schleife, das heißt, sie schneidet sich selbst in genau einem Punkt.



Bestimmen Sie die Länge der Schleife, also die Bogenlänge zwischen den beiden Durchläufen des Schnittpunktes.

4. Die Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1$$

besteht aus zwei Ästen, einem mit $x \leq -1$ und einem mit $x \geq 1$. Beschreiben Sie den positiven Ast als Kurve $\vec{x}(t)$. Berechnen Sie die Krümmung der Kurve und zeigen Sie, dass diese am Scheitelpunkt $(1, 0)$ extremal ist.

5. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Kurve $y = \ln(x)$ und den Krümmungskreis am Scheitelpunkt.

6. Berechnen Sie die Evolute der Standardparabel $y = x^2$ und bilden Sie Parabel und Evolute in einer Skizze ab.

7. Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den die Schleife aus Aufgabe 3 umschließt.

8. Die *Pascalsche Schnecke* ist die durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos^2(t) + b\cos(t) \\ a\cos(t)\sin(t) + b\sin(t) \end{pmatrix}$$

gegebene Kurve. Dabei sind a, b Konstanten ungleich 0. Bestimmen Sie den von Ihr umschlossenen Flächeninhalt.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wir betrachten die Kurve, die durch die Polarkoordinaten $r(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$ mit $\varphi \geq 0$ gegeben ist. Die Kurve verläuft offenbar innerhalb des Kreises mit Radius 1. Zeigen Sie, dass die Kurve dennoch unendlich lang ist. Welchen Flächeninhalt die Kurve von $t = 0$ bis $t = \infty$?