Übungen Mathematik II, M

6. Übungsblatt

2.5.2013

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + 3x_3\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 4x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 5x_3\end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2 - 3x_3\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 4x_2 - x_3\\ \dot{x}_3 &= 2x_3\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2\end{aligned}$$

(Hinweis: Eulersche Formel)

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 + \sin(t)\\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 3x_2 + \cos(t)\end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + 1\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + 2t\end{aligned}$$

6. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 - 1\\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 3x_2 - 1\end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x_1(0) = -2$ und $x_2(0) = 3$ erfüllt.

7. Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 6x_1 + 2x_2 + e^{2t}\\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + 3x_2 + e^{2t}\end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x_1(0) = x_2(0) = 1$ erfüllt.

8. Bestimmen Sie zu der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt t die Richtung der Tangente (inklusive Angabe von vertikalen und horizontalen Tangenten sowie singulären Punkten) und berechnen Sie die Bogenlänge im Zeitintervall $[0, \sqrt{5}]$.

9. Bestimmen Sie zu der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3t) + 3\sin(t) \\ 3\cos(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt $t \in [0, 2\pi]$ die Richtung der Tangente (inklusive Angabe von vertikalen und horizontalen Tangenten sowie singulären Punkten) und berechnen Sie die Bogenlänge im Zeitintervall $[0, 2\pi]$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Ein Kreis vom Radius r wird auf einem Kreis vom Radius $2r$ abgerollt. Welche Kurve beschreibt ein Punkt auf dem Rand des ersten Kreises und welche Strecke legt er zurück, wenn der große Kreis einmal umrundet ist?