Übungen Mathematik II, M

5. Übungsblatt

25.4.2013

1. Wie lauten die speziellen Ansätze für partikuläre Lösungen der folgenden Differentialgleichungen? (Die Werte der Koeffizienten müssen nicht ausgerechnet werden.)

(a) $y^{(4)} + 5y''' + 6y'' - 4y' - 8y = x^2 + \frac{x^3+2}{e^{2x}}$

(b) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 42e^x - 7e^x \sin(x) + 1$

(c) $y^{(4)} - 2y'' + y = x\cosh(x) + x^2 e^{-x}$

2. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 18e^x + (12x - 18)e^{2x}.$$

3. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von

$$y'' - 2y' + 5y = 12e^x \cos(2x) + 18e^x \sin(2x) - 210.$$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' - 2y' + y = 18e^x.$$

Welche Lösung erfüllt zusätzlich die Bedingungen $y(0) = 6$ und $y'(0) = 48$?

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' + 4y' + 3y = \frac{16x + 14}{e^x} - 2\sin(x) + 6\cos(x).$$

Welche Lösung erfüllt zusätzlich die Bedingungen $y(0) = 3$ und $y'(0) = 4$?

6. Führen Sie das System

$$\begin{aligned} y_1' &= -8y_1 + 14y_2 + 2 \\ y_2' &= -3y_1 + 5y_2 - 4x \end{aligned}$$

auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück und bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung des Systems.

7. Führen Sie das System

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + 3y_2 + 25x \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2 + 2e^x \end{aligned}$$

auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück und bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung des Systems.

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$

9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 10y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= -11y_1 - 4y_2 + 3y_3 \\ y_3' &= 8y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei $L[y] = e^{\lambda x}$ eine lineare Differentialgleichung. Der spezielle Ansatz lautet $y_I = ae^{\lambda x}$, falls λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(a) Warum funktioniert der Ansatz in diesem Fall immer? Überlegen Sie sich zu diesem Zweck, dass stets $L[ae^{\lambda x}] = aCe^{\lambda x}$ mit einer Konstanten $C \neq 0$ gilt.

(b) Warum funkioniert der Ansatz $y_I = axe^{\lambda x}$ immer, sofern λ eine Nullstelle der Vielfachheit 1 ist?