Mathematatik II, M

1. Übungsblatt

7.3.2013

1. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + 2B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

2. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 12 & -13 & -1 \\ -1 & 0 & -14 & 11 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 10 \\ 2 & -14 & 12 \\ -3 & 11 & -13 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & -18 & 1 \\ -8 & -12 & 2 & 18 & -10 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

7. Formulieren Sie das folgende lineare Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und wenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren an, um die Lösungen zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 5 \\ x + y &= 0 \\ 3x - 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

8. Formulieren Sie das folgende lineare Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und wenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren an, um die Lösungen zu bestimmen.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe für Interessierte: (a) Überlegen Sie sich, dass für eine $(m \times n)$-Matrix A, Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ stets $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ und $A(\lambda\vec{x}) = (\lambda A)\vec{x} = \lambda(A\vec{x})$ gilt.

(b) Welche geometrischen Transformationen der Ebene $\mathbb{R}^2$ werden durch die Abbildungen $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $g(\vec{x}) = B\vec{x}$ und $h(\vec{x}) = C\vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

beschrieben?