Übungen Mathematik II, M

Nachklausur zu Klausur 2, Lösungen

30.9.2013

1. Berechnen Sie zu der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Krümmung im Punkt $(0, b)$ sowie den Mittelpunkt des Krümmungskreises an diesem Punkt.

   Lösung: Um die Krümmung zu berechnen, müssen wir zunächst die Kurve parametrisieren. Die übliche Parametrisierung lautet $x = a\cos(t), y = b\sin(t)$. Die Ableitungen davon sind $\dot{x} = -a\sin(t), \ddot{x} = -a\cos(t), \dot{y} = b\cos(t)$ und $\ddot{y} = -b\sin(t)$. Weil am Punkt $(0, b)$ $\sin(t) = 1$ und $\cos(t) = 0$ gilt, haben wir die Krümmung

   $$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t)}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b}{a^2}.$$

   (Der Zähler lässt sich wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$ auch für allgemeines t zu ab verkürzen.)

   Die Koordinaten (ξ, η) des Mittelpunktes des Krümmungskreises sind

   $$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} = 0 - \frac{a^2 \cdot 0}{ab} = 0$$

   und

   $$\eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} = b + \frac{a^2 \cdot (-a)}{ab} = b - \frac{a^2}{b}.$$

   □

2. Eine Kurve sei implizit durch

   $$x^3 + 3x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$$

   gegeben. Bestimmen Sie

   (a) alle singulären Punkte auf der Kurve

   (b) alle Punkte mit horizontaler Tangente und

   (c) alle Punkte mit vertikaler Tangente.

   Lösung: Mit $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - y^2 + 2y - 1$ ergibt sich $f_x = 3x^2 + 6x$ und $f_y = -2y + 2$. Somit ist $f_x = 0$ genau für $x = 0$ und $x = -2$, $f_y = 0$ gilt nur für $y = 1$.

   Singuläre Punkte erfüllen $f_x = f_y = 0$, die einzigen Kandidaten sind also $(0, 1)$ und $(-2, 1)$. Der Punkt $(-2, 1)$ liegt aber nicht auf der Kurve, denn

$f(-2,1) = 4$. Wegen $f(0,1) = 0$ liegt $(0,1)$ auf der Kurve und ist somit ein singulärer Punkt.

Punkte mit horizontaler Tangente erfüllen $f_x = 0$, also $x = 0$ oder $x = -2$. Für $x = 0$ folgt aus $f(x,y) = 0$, dass $-y^2 + 2y - 1 = 0$, was man zu $-(y-1)^2 = 0$ umformen kann. Die einzige Lösung ist also $y = 1$. Da $(0,1)$ aber bereits als singulärer Punkt bestimmt wurde, liegt dort keine horizontale Tangente vor. Für $x = -2$ folgt

$$\begin{aligned} & 4 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ \iff \quad & y^2 - 2y - 3 = 0 \\ \iff \quad & y = 1 \pm \sqrt{1+3}, \end{aligned}$$

also $y = 3$ oder $y = -1$. Bei $(-2,3)$ und $(-2,-1)$ liegen also horizontale Tangenten vor.

Punkte mit vertikaler Tangente erfüllen $f_y = 0$, also $y = 1$. Aus $f(x,y) = 0$ folgt dann $x^3 + 3x^2 = 0$, also $x = 0$ oder $x = -3$. Erneut erhalten wir $(0,1)$, was aber bereits ein singulärer Punkt ist. Eine vertikale Tangente haben wir also nur bei $(-3,1)$. □

3. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + x^2 - y^2 - 2x + 2y$$

und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Lösung: Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 2 \quad \text{und} \quad f_y = -3x^2 + 6xy - 3y^2 - 2y + 2.$$

Sind beide Null, dann auch ihre Summe $f_x + f_y = 2x - 2y$, also $x = y$. Setzen wir das in f_x ein, erhalten wir

$$0 = f_x = 3x^2 - 6x^2 + 3x^2 + 2x - 2 = 2x - 2,$$

also $x = y = 1$.

Die zweiten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x - 6y + 2, \\ f_{xy} = f_{yx} &= -6x + 6y \\ \text{und} \qquad f_{yy} &= 6x - 6y - 2. \end{aligned}$$

An der Stelle $(1,1)$ ist die Hesse-Matrix also $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Da sie indefinit ist (sie hat einen positiven Eigenwert 2 und einen negativen -2), ist $(1,1)$ ein Sattelpunkt und f besitzt keine Extremstellen. □

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$y' + (2x+1)y - y^2 = x^2 + x + 1.$$

Lösung: Für Riccatische Differentialgleichungen sind zum Beispiel ax^b und ae^{bx} als mögliche Ansätze für eine partikuläre Lösung bekannt. Da die Störfunktion ein Polynom ist, setzen wir $y_p = ax^b$ an:

$$\begin{aligned}
& & y_p' + (2x+1)y_p - y_p^2 &= x^2 + x + 1 \\
&\iff & abx^{b-1} + 2ax^{b+1} + ax^b - a^2x^{2b} &= x^2 + x + 1 \\
&\iff & 2ax^{b+1} - a^2x^{2b} + ax^b + abx^{b-1} &= x^2 + x + 1.
\end{aligned}$$

Damit dies erfüllt ist, muss insbesondere $abx^{b-1} = 1$ gelten. Daher ist der Exponent $b-1$ Null, also $b = 1$ und auch $a = 1$. Einsetzen in die anderen Summanden ergibt

$$2x^2 - x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1,$$

eine wahre Aussage. Also ist $y_p = x$ eine partikuläre Lösung.

Substitution $y = z + y_p$ führt die Riccatische Differentialgleichung $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$ in $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ über. In unserem Fall ist es

$$z' + (2x + 1 + 2 \cdot (-1) \cdot x)z - z^2 = 0 \quad \iff \quad z' + z - z^2 = 0.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung, die man durch Substitution $w = z^{-1}$ löst. Dadurch wird die DGL zu $-w' + w = 1$ (allgemein wird $z' + f(x)z + g(x)z^\alpha = 0$ zu $\frac{w'}{1-\alpha} + f(x)w = -g(x)$), was man als $w' = w - 1$ umschreiben kann. Für die Lösung dieser Differentialgleichung kann man die homogene und eine partikuläre Lösung wie gehabt berechnen. Allerdings sind sowohl die homogene Lösung $w = ce^x$ als auch die partikuläre Lösung $w = 1$ leicht direkt zu sehen. Die allgemeine Lösung für w ist also $w = ce^x + 1$, allgemeine Lösung für z ist somit $z = \frac{1}{w} = \frac{1}{ce^x+1}$ oder $z = 0$ (nicht zu vergessen), für y ist es $y = x + \frac{1}{ce^x+1}$ oder $y = x$. $\square$