# Übungen Mathematik II, M

Klausur 2, Lösungen
(Gruppe A)

21.6.2013

1. Berechnen Sie zur Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t > 0$$

die Torsion und Krümmung zu einem allgemeinen Zeitpunkt $t$. Wie verhalten sich Torsion und Krümmung bei $t \to 0$ und $t \to \infty$?

*Lösung:* Wir berechnen zuerst die Ableitungen von $\vec{x}(t)$. Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2t^{\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\tau = \frac{\left( \begin{pmatrix} 2t^{\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2t^{\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2t^{\frac{1}{2}} \\ -t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2t^{\frac{1}{2}} \\ -t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right|^2} = \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{4 + 4t + \frac{1}{t}} = \frac{-1}{\sqrt{t}(2t+1)^2}$$

und

$$\kappa = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2t^{\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2t^{\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right|^3} = \frac{\sqrt{4 + 4t + \frac{1}{t}}}{\sqrt{4t+1+4t^2}^3} = \frac{\sqrt{4t + 4t^2 + 1}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{4t+1+4t^2}^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}(4t+1+4t^2)} = \frac{1}{\sqrt{t}(2t+1)^2}.$$

Für $t \to 0$ geht der Nenner von $\tau$ und $\kappa$ offensichtlich gegen Null, daher geht die Torsion gegen $-\infty$ und die Krümmung gegen $\infty$. Für $t \to \infty$ geht der Nenner gegen $\infty$ und beide Werte somit gegen Null. $\square$

2. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y,z) = \tan(3x)(z-4)^5 \ln(2y) - 2yz$$

am Punkt $P = (\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}, 3)^t$ in die Richtung des Vektors $\vec{v} = (2\sqrt{7}, -2, 7)^t$.

*Lösung:* Zuerst müssen wir den Gradienten berechnen. Die partiellen Ableitungen von $f$ sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= \frac{3(z-4)^5 \ln(2y)}{\cos^2(3x)}, \\ f_y(x,y,z) &= \frac{\tan(3x)(z-4)^5}{y} - 2z \\ \text{und} \qquad f_z(x,y,z) &= 5\tan(3x)(z-4)^4 \ln(2y) - 2y. \end{aligned}$$

Am gegebenen Punkt ist $\ln(2y) = \ln(1) = 0$, also ist dort $f_x = 0$ und $f_z = -2y = -1$. Die verbleibende partielle Ableitung ist $f_y = \frac{1 \cdot (-1)^5}{\frac{1}{2}} - 6 = -8$.

Die Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $\vec{r}$ der Länge 1 ist also $(0, -8, -1)^t \cdot \vec{r}$. Wir möchten $\vec{v}$ daher zuerst normieren. Die Länge von $\vec{v}$ ist

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 + (-2)^2 + 7^2} = \sqrt{28 + 4 + 49} = 9.$$

Die gesuchte Richtungsableitung ist somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2\sqrt{7} \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{16-7}{9} = 1.$$ $\square$

3. Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = \sin(x) - \sin(y) + \sin(x-y)$$

im Gebiet $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \ge y \ge -\frac{\pi}{2}\}$.

*Lösung:* Zunächst suchen wir die Kandidaten für die Extremstellen im Inneren von $G$. Der Gradient von $f$ ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x-y) \\ -\cos(y) - \cos(x-y) \end{pmatrix}.$$

Damit der Gradient Null ist, muss $\cos(x-y) = -\cos(x)$ und $\cos(x-y) = -\cos(y)$ gelten, insbesondere also $\cos(x) = \cos(y)$. Dies gilt in $G$ nur für $y = x$ und $y = -x$. Ersteres kann aber nur für $x = y = 0$ der Fall sein und dann ist auch $y = -x$. Wir können also von $y = -x$ ausgehen.

Wir suchen daher ein $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos(2x) = -\cos(x)$. Allgemein gilt $\cos(a) = -\cos(b)$ genau für $a = \pi + b$ und $a = \pi - b$ sowie alle Verschiebungen um Vielfache von $2\pi$. Im Fall $b = x$ liegt von diesen Werten nur $\pi - b$

im Intervall $[0,\pi]$, welches $2x$ enthält. Also muss $2x = \pi - x$ gelten und somit $x = \frac{\pi}{3}$. Unser einziger Kandidat für eine Extremstelle im Inneren von $G$ ist also der Punkt $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$.

Nun betrachten wir den Rand von $G$. Dieser besteht aus vier Geradenabschnitten mit $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ beziehungsweise $y = -\frac{\pi}{2}$. Für $x = 0$ ist $f(x,y) = -\sin(y) + \sin(-y) = -2\sin(y)$, was keine Extremstellen im Inneren von $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ hat. Für $y = 0$ ist $f(x,y) = 2\sin(x)$, was ebenfalls keine Extremstellen im Inneren von $[0, \frac{\pi}{2}]$ hat.

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $f(x,y) = 1 - \sin(y) + \sin(\frac{\pi}{2} - y)$. Die Ableitung hiervon nach $y$ ist $-\cos(y) - \cos(\frac{\pi}{2} - y)$, was nur dann Null ist, wenn $\frac{\pi}{2} - y = \pi + y$ und somit $y = -\frac{\pi}{4}$. Ein weiterer Kandidat für eine Extremstelle ist also $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$.

Für $y = -\frac{\pi}{2}$ ist $f(x,y) = \sin(x) + 1 + \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Die Ableitung hiervon nach $x$ ist $\cos(x) + \cos(x + \frac{\pi}{2})$, was nur dann Null ist, wenn $x + \frac{\pi}{2} = \pi - x$ und somit $x = \frac{\pi}{4}$. Ein weiterer Kandidat für eine Extremstelle ist also $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$.

Hinzu kommen als mögliche Extremstellen noch die Ecken von $G$. Wir vergleichen nun die Funktionswerte an diesen Stellen.

| $(x,y)$ | $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ | $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ | $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ | $(0,0)$ | $(0, -\frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, 0)$ | $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x,y)$ | $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ $\approx 2.598$ | $1+\sqrt{2}$ $\approx 2.414$ | $1+\sqrt{2}$ $\approx 2.414$ | $0$ | $2$ | $2$ | $2$ |

Wir haben somit ein globales Minimum bei $(0,0)$ und ein globales Maximum bei $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$. $\square$

4. Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung

$$2xy^2 + x^2yy' + ye^x - y' = 0$$

exakt ist und lösen sie die Gleichung.

*Lösung:* Die Differentialgleichung ist von der Form

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

mit $P(x,y) = 2xy^2 + ye^x$ und $Q(x,y) = x^2y - 1$. Es ist $P_y(x,y) = 4xy + e^x$ und $Q_x(x,y) = 2xy$, die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

Wir suchen nun einen integrierenden Faktor $M$. Für diesen muss $M \cdot (P_y - Q_x) = M \cdot (2xy + e^x)$ entweder $M'Q = M' \cdot (x^2y - 1)$ entsprechen (falls $M$ von $y$ abhängt) oder $-M'P = -M' \cdot (2xy^2 + ye^x)$ (falls $M$ von $x$ abhängt). Letzteres ergibt die einfachere Gleichung, denn dann ist

$$\begin{aligned}
& & M \cdot (2xy + e^x) &= -M' \cdot (2xy^2 + ye^x) \\
&\iff & \frac{M'}{M} &= -\frac{1}{y} \\
&\iff & \int \frac{1}{M} dM &= -\int \frac{1}{y} dy \\
&\iff & \ln|M| &= -\ln|y| \\
&\iff & |M| &= \frac{1}{|y|}.
\end{aligned}$$

Ein integrierender Faktor ist also $M = \frac{1}{y}$.
Mit diesem multipliziert ergibt sich die neue Differentialgleichung

$$2xy + e^x + \left(x^2 - \frac{1}{y}\right) y' = 0,$$

also eine exakte Differentialgleichung mit $P(x,y) = 2xy+e^x$ und $Q(x,y) = x^2 - \frac{1}{y}$. Wir erhalten $F(x,y)$, indem wir zuerst $P$ nach $x$ integrieren.

$$F = \int 2xy + e^x dx = x^2y + e^x + \Phi(y)$$

Da auch $F_y = Q$ gelten soll, folgt

$$\begin{aligned} & & x^2 + \Phi'(y) &= x^2 - \frac{1}{y} \\ &\Longleftrightarrow & \Phi(y) &= -\ln(y). \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion $F$ ist also

$$F(x,y) = x^2y + e^x - \ln(y)$$

und die Lösung $y$ der Differentialgleichung ist durch die Gleichung

$$x^2y + e^x - \ln(y) = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ bestimmt. $\square$