Formelsammlung, Klausur 2

Mathematik II, M, Übungen

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$	$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$
x^a, $(a \neq 0)$	ax^{a-1}	e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameter-darstellung
Kreis, Radius R	$x^2+y^2=R^2$	$x(t)=R\cos(t)$ $y(t)=R\sin(t)$
Ellipse, Halbachsen a,b	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x(t)=a\cos(t)$ $y(t)=b\sin(t)$
Hyperbel, H.achsen a,b	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x(t)=a\cosh(t)$ $y(t)=b\sinh(t)$

Tangente: $\dot{\vec{v}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$

Singulärer Punkt ist Punkt $\vec{v}(t)$ mit $\dot{\vec{v}}(t)=0$.

Bogenlänge: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$

In Polarkoordinaten: $s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\dot{r}(\varphi)^2+r(\varphi)^2}dt$

Krümmung:

Parameterdarstellung
$$\kappa=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Falls $y=y(x)$
$$\kappa=\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(P)}$ und Mittelpunkt (ξ,η) berührt Kurve in P und hat Krümmung κ.

$$\xi=x-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \quad \text{und} \quad \eta=y+\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$$

in Parameterdarstellung. Falls $y=y(x)$, dann

$$\xi=x-\frac{(1+(y')^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad \eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Überstrichener Flächeninhalt:

Parameterdarstellung: $A=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt$

Polarkoordinaten: $A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r(\varphi)^2d\varphi$

Raumkurven

Bogenlänge: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}dt$

$$\textit{Tangentenvektor } \vec{t}=\frac{d\vec{x}}{ds}=\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$$

$$\textit{Hauptnormalvektor } \vec{n}=\frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|}=\frac{\ddot{\vec{x}}-(\ddot{\vec{x}}\cdot\vec{t})\vec{t}}{\left|\ddot{\vec{x}}-(\ddot{\vec{x}}\cdot\vec{t})\vec{t}\right|}=\vec{b}\times\vec{t}$$

$$\textit{Binormalvektor } \vec{b}=\frac{\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}\right|}=\vec{t}\times\vec{n}$$

$$\textit{Krümmung: } \kappa=\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|=\frac{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$$

$$\textit{Torsion: } \tau=-\frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{(\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}})\cdot\dddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}\times\ddot{\vec{x}}|^2}$$

Differentialrechnung in mehreren Variablen

Tangentialebene von $f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0) hat die Gleichung $z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(y-y_0)$ und den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\\ -1\end{pmatrix}$.

Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{r}$ (mit $|\vec{r}|=1$) ist $\nabla f\cdot\vec{r}$. Die Richtung des Gradienten ist die Richtung des größten Anstiegs.

Divergenz: Für $\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Für $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ R(x,y,z)\end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

Ein Punkt mit positiver Divergenz heißt *Quelle* von $\vec{v}$, ein Punkt mit negativer Divergenz *Senke*. Das Feld heißt *quellenfrei*, wenn die Divergenz überall 0 ist.

Rotation: Für $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\ Q(x,y,z)\\ R(x,y,z)\end{pmatrix}$ ist die Rotation $\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\end{pmatrix}$. Das Feld heißt *wirbelfrei*, falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

Implizite Funktionen

Eine Gleichung $f(x,y)=0$ gibt eine Kurve in impliziter Form an. Ein Punkt (x_0,y_0) auf der Kurve heißt *singulär*, falls $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. Die Tangente an einem nicht singulären Punkt verläuft horizontal, falls $f_x(x_0,y_0)=0$, und vertikal, falls $f_y(x_0,y_0)=0$. Die Tangentengleichung ist

$$y=y_0-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0), \quad \text{falls } f_y(x_0,y_0)\neq 0$$
$$x=x_0, \quad \text{falls } f_y(x_0,y_0)=0.$$

Taylorpolynom Das Taylorpolynom vom Grad n der Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt (x_0,y_0) ist

$$
\begin{aligned}
T_n(x,y) = f(x_0,y_0)& \\
&+ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\
&\qquad + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
&\qquad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0)^i.
\end{aligned}
$$

Extremwertaufgaben
Die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen einer Funktion heißt *positiv definit*, falls alle Eigenwerte positiv sind, *negativ definit*, falls alle Eigenwerte negativ sind, und *indefinit*, falls sie positive und negative Eigenwerte hat.
Ein *Hauptminor* Δ_k von H ist die Determinante der linken oberen $k \times k$ Teilmatrix.
Kriterium für Definitheit: H ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind. Sie ist genau dann negativ definit, wenn $\Delta_k > 0$ für gerades k und $\Delta_k < 0$ für ungerades k.
Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist der Gradient Null.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Eine Stelle mit Gradient Null ist ein Maximum, falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, ein Minimum, falls H_f positiv definit ist, und ein Sattelpunkt, falls H_f indefinit ist.
Randextrema:

- Ist (x_0,y_0) ein Maximum von f auf dem Rand des Gebietes G, so ist (x_0,y_0) genau dann ein Maximum auf G, falls (x_0,y_0) eine Ecke von G ist oder der Gradient bei (x_0,y_0) von G weg zeigt.
- Ist (x_0,y_0) ein Minimum von f auf dem Rand des Gebietes G, so ist (x_0,y_0) genau dann ein Minimum auf G, falls (x_0,y_0) eine Ecke von G ist oder der Gradient bei (x_0,y_0) in G hinein zeigt.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.
Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate
Sind $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ gegeben und $ax+b$ eine Gerade, so wird $\sum_{k=1}^n (y_k-(ax_k+b_k))^2$ minimiert durch

$$
a = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_k y_k & \sum x_k \\ \sum y_k & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k y_k \\ \sum x_k & \sum y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{vmatrix}}.
$$

Extrema unter Nebenbedingungen
Ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Bedingung $g(x,y) = 0$ erfüllt für $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ stets $\nabla F = 0$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Bernoullische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$ mit $\alpha \neq 0,1$

- Multipliziere mit $y^{-\alpha}$ und substituiere $z = y^{1-\alpha}$.
- Bestimme die Lösung von $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = -g(x)$.
- Lösung der ursprünglichen DGL ist $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und für positives α auch $y = 0$.

Riccatische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde eine partikuläre Lösung y_p (z.B. durch Ansatz $y = ax^b$ oder $y = ae^{bx}$) und substituiere $y = z + y_p$.
- Bestimme die Lösung von $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ und setze dies in $y = z + y_p$ ein.

Exakte DGL: $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ heißt *exakt*, falls $P_y = Q_x$. Es gibt dann eine Funktion $F(x,y)$, so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung $F(x,y) = c$ beschrieben wird. Man findet F wie folgt.

- Setze $F = \int P dx + \Phi(y)$ und berechne Φ aus der Bedingung $F_y = Q$ oder
- setze $F = \int Q dy + \Psi(x)$ und berechne Ψ aus der Bedingung $F_x = P$.

Integrierender Faktor: Ist $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ nicht exakt, suche eine Funktion $M(x)$ oder $M(y)$ mit

$$
M\cdot(P_y - Q_x) = M_x Q \quad \text{bzw.} \quad M\cdot(P_y - Q_x) = -M_y P.
$$

Die DGL $MP(x,y) + MQ(x,y)y' = 0$ ist dann exakt.
Clairautsche DGL: $y = xy' + h(y')$ hat die Lösungen $y = cx + h(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Einhüllende der Lösungen ist die Kurve $(x,y) = \big(-h'(z), -h'(z)z + h(z)\big)$.
DGL zweiter Ordnung:

- $y'' = f(x) \Longrightarrow y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1x + c_2$
- $y'' = f(x,y') \rightsquigarrow$ substituiere $z = y'$
- $y'' = f(y,y') \rightsquigarrow$ Löse die DGL $z'\cdot z = f(y,z)$. Löse dann die DGL $y' = z(y)$.

Eulersche DGL: $a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$. Substituiere $x = e^t$ und $v(t) = y(e^t)$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= e^{-t}\cdot\dot v(t), \\
y''(x) &= e^{-2t}\cdot(\ddot v(t) - \dot v(t)), \\
\text{und}\qquad y'''(x) &= e^{-3t}\cdot(\dddot v(t) - 3\ddot v(t) + 2\dot v(t)).
\end{aligned}
$$