Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
31. Mai 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie alle Punkte (x_0, y_0), an denen der Gradient der Funktion

$$f(x,y) = (xy^2 - 8)e^{x+y}$$

Null ist. Untersuchen Sie, ob diese Punkte lokale Extrema von f auf der Geraden $g\colon y = y_0$ sind.

Lösung: Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} & f_x = y^2e^{x+y} + (xy^2 - 8)e^{x+y} = (xy^2 + y^2 - 8)e^{x+y} \\ \text{und} \qquad & f_y = 2xye^{x+y} + (xy^2 - 8)e^{x+y} = (xy^2 + 2xy - 8)e^{x+y}. \end{aligned}$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (xy^2 + y^2 - 8)e^{x+y} \\ (xy^2 + 2xy - 8)e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Da die Exponentialfunktion nirgends Null ist, ist der Gradient genau dann Null, wenn

$$\begin{aligned} & xy^2 + y^2 - 8 = 0 \\ \text{und} \qquad & xy^2 + 2xy - 8 = 0. \end{aligned}$$

Bildet man die Differenz der beiden Gleichungen, erhält man

$$y^2 - 2xy = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 2xy$$

und somit $y = 0$ oder $y = 2x$. Im Fall $y = 0$ sind jedoch beide obigen Gleichungen nicht erfüllt, es muss also $y = 2x$ gelten. Setzen wir dies in die beiden Gleichungen ein, erhalten wir jeweils

$$4x^3 + 4x^2 - 8 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3 + x^2 - 2 = 0.$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Eine Lösung dieser Gleichung ist mit $x_0 = 1$ leicht zu sehen. Durch Polynomdivision erhält man

$$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2).$$

Die Nullstellen von $x^2 + 2x + 2$ sind $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$, x_0 ist also die einzige reelle Lösung. Aus $y = 2x$ folgt damit $y_0 = 2$. Der Gradient ist also genau an der Stelle $(1, 2)$ Null.

Nun betrachten wir die Gerade g. Diese können wir als $g(t) = (1+t, 2)$ parametrisieren, so dass der Punkt $(1, 2)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durchlaufen wird. Die Funktion f lässt sich auf g durch die Funktion

$$h(t) = f\big(g_1(t), g_2(t)\big) = \big((1+t)2^2 - 8\big)e^{1+t+2} = (4t-4)e^{3+t}$$

beschreiben. Durch Ableiten von h können wir entscheiden, ob bei $t = 0$ ein Extremum vorliegt. Es ist

$$\begin{aligned} && \dot{h}(t) &= 4e^{3+t} + (4t-4)e^{3+t} = 4te^{3+t} \\ \text{und} && \ddot{h}(t) &= 4e^{3+t} + 4te^{3+t} = (4t+4)e^{3+t}. \end{aligned}$$

Es ist $\dot{h}(0) = 0$, die notwendige Bedingung für ein Extremum ist also erfüllt. Dies ist automatisch der Fall, denn nach der Kettenregel für Ableitungen ist $\dot{h} = f_x \dot{g}_1 + f_y \dot{g}_2$ und da die partiellen Ableitungen f_x und f_y an der Stelle $(1, 2)$ Null sind, ist auch $\dot{h}$ an der Stelle $t = 0$ Null.

Wir müssen also nur $t = 0$ in die zweite Ableitung einsetzen, was $\ddot{h}(0) = 4e^3$ ergibt. Da dies positiv ist, handelt es sich um ein Minimum. □

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils alle Punkte (x_0, y_0), an denen der Gradient Null ist. Untersuchen Sie, ob diese Punkte lokale Extrema der Funktion auf der Geraden g sind.

(a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$, $\quad g\colon (x_0, y_0) + t(1, 1)$

(b) $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$, $\quad g\colon (x_0, y_0) + t(1, 2)$

(c) $f(x, y) = x^2 y - 4y$, $\quad g\colon (x_0, y_0) + t(1, -1)$

(d) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $\quad g\colon x = x_0$

(e) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $\quad g\colon (x_0, y_0) + t(1, 2)$

Lösung: (a) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} \qquad \text{und} \qquad f_y = -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2},$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist genau dann Null, wenn die Zähler der beiden Brüche Null sind, also bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Die Gerade g wird durch (t, t) parametrisiert. Die Funktion f wird auf g also durch

$$h(t) = \frac{1}{t^2+t^2+1} = \frac{1}{2t^2+1}$$

beschrieben. Die Ableitungen von h sind

$$\begin{aligned} &\dot{h}(t) = -\frac{4t}{(2t^2+1)^2} \\ \text{und} \qquad &\ddot{h}(t) = -\frac{4(2t^2+1)^2 - 4t \cdot 2(2t^2+1)4t}{(2t^2+1)^4} = -\frac{-24t^2+4}{(2t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von h ist an der Stelle $t = 0$ wieder automatisch Null, die zweite Ableitung ist $\ddot{h}(0) = -4$. Da dieser Wert negativ ist, handelt es sich bei der betrachteten Stelle um ein Maximum.

(b) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = \cos(x) \qquad \text{und} \qquad f_y = \cos(y),$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist genau dann Null, wenn die Zähler der beiden Brüche Null sind, also bei $(x_0, y_0) = \left(m\pi + \frac{1}{2}\pi, n\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$.

Sei (x_0, y_0) einer dieser Punkte. Die Gerade g wird dann durch $(x_0 + t, y_0 + 2t)$ parametrisiert. Die Funktion f wird auf g also durch

$$h(t) = \sin(x_0 + t) + \sin(y_0 + 2t)$$

beschrieben. Die Ableitungen von h sind

$$\begin{aligned} & \dot{h}(t) = \cos(x_0 + t) + 2\cos(y_0 + 2t) \\ \text{und} \qquad & \ddot{h}(t) = -\sin(x_0 + t) - 4\sin(y_0 + 2t). \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von h ist an der Stelle $t = 0$ wieder automatisch Null, die zweite Ableitung ist

$$\ddot{h}(0) = \begin{cases} -5 & \text{für } m, n \text{ gerade}, \\ 3 & \text{für } m \text{ gerade}, n \text{ ungerade}, \\ -3 & \text{für } m \text{ ungerade}, n \text{ gerade}, \\ 5 & \text{für } m, n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Für gerades n handelt es sich bei der Stelle $\left(m\pi + \frac{1}{2}\pi, n\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$ also um ein Maximum von f auf g, bei ungeradem n um ein Minimum.

(c) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = 2xy \qquad \text{und} \qquad f_y = x^2 - 4,$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist also genau bei $(x_0, y_0) = (\pm 2, 0)$ Null.

Die Gerade g wird durch $(\pm 2 + t, -t)$ parametrisiert. Die Funktion f wird auf g also durch

$$h(t) = (\pm 2 + t)^2(-t) - 4(-t) = -t^3 \mp 4t^2$$

beschrieben. Die Ableitungen von h sind

$$\begin{aligned} & \dot{h}(t) = -3t^2 \mp 8t \\ \text{und} \qquad & \ddot{h}(t) = -6t \mp 8. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von h ist an der Stelle $t = 0$ wieder automatisch Null, die zweite Ableitung ist $\ddot{h}(0) = \mp 8$. Es handelt sich bei $(2, 0)$ also um ein Maximum auf g und bei $(-2, 0)$ um ein Minimum.

(d) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = 3x^2 \qquad \text{und} \qquad f_y = 3y^2,$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist genau bei $(x_0, y_0) = (0,0)$ Null.

Die Gerade g wird durch $(0,t)$ parametrisiert. Die Funktion f wird auf g also durch

$$h(t) = 0^3 + t^3 = t^3$$

beschrieben. Die Ableitungen von h sind

$$\begin{aligned} && \dot{h}(t) &= 3t^2 \\ \text{und} && \ddot{h}(t) &= 6t. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von h ist an der Stelle $t = 0$ wieder automatisch Null, die zweite Ableitung ist in diesem Fall aber ebenfalls Null. Daher berechnen wir die dritte Ableitung. Diese ist $\dddot{h}(t) = 6$. Da dieser Wert nicht Null ist, handelt es sich bei $(0,0)$ um einen Sattelpunkt auf g. Insbesondere ist es kein lokales Extremum von f.

(e) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad f_y = 2ye^{x^2+y^2},$$

Der Gradient von f ist also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist genau bei $(x_0, y_0) = (0,0)$ Null.

Die Gerade g wird durch $(t, 2t)$ parametrisiert. Die Funktion f wird auf g also durch

$$h(t) = e^{t^2+(2t)^2} = e^{5t^2}$$

beschrieben. Die Ableitungen von h sind

$$\begin{aligned} && \dot{h}(t) &= 10te^{5t^2} \\ \text{und} && \ddot{h}(t) &= 10e^{5t^2} + 100t^2e^{5t^2} = (100t^2 + 10)e^{5t^2}. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von h ist an der Stelle $t = 0$ wieder automatisch Null, die zweite Ableitung ist $\ddot{h}(0) = 10$. Da dieser Wert positiv ist, handelt es sich bei der betrachteten Stelle um ein Minimum. □