Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
17. Mai 2013

***Aufgabe 1.** Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$$

das begleitende Dreibein in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

Lösung: Zuerst müssen wir die Bogenlänge der Kurve berechnen. Dafür benötigen wir die Ableitung der Kurve.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$$

Die Bogenlänge ist

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\cosh^2(\tau) + 1 + \sinh^2(\tau)} d\tau$$

Aus der Identität $\cosh^2(\tau) - \sinh^2(\tau) = 1$ folgt $\cosh^2(\tau) = 1 + \sinh^2(\tau)$ und somit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2\cosh^2(\tau)} d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\cosh(\tau) d\tau = \left[\sqrt{2}\sinh(\tau)\right]_0^t = \sqrt{2}\sinh(t).$$

Also ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}s \\ \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \sqrt{1 + \frac{1}{2}s^2} \end{pmatrix}.$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Den Tangentenvektor erhalten wir durch

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}s^2}} \\ \frac{s}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}s^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+s^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}.$$

Für den Hauptnormalvektor müssen wir die Ableitung des Tangentenvektors berechnen.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{s}{\sqrt{2+s^2}^3} \\ \frac{4}{\sqrt{4+2s^2}^3} \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s^2}{(2+s^2)^3} + \frac{16}{(4+2s^2)^3}} &= \sqrt{\frac{s^2}{(2+s^2)^3} + \frac{2}{(2+s^2)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{s^2+2}{(2+s^2)^3}} = \frac{1}{s^2+2}. \end{aligned}$$

Der Hauptnormalvektor ist also

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{s}{\sqrt{2+s^2}} \\ \frac{2}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir noch den Binormalvektor als Kreuzprodukt.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2+s^2}{\sqrt{2+s^2}\cdot\sqrt{4+2s^2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+2s^2}} \\ -\frac{s}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+s^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2+s^2}} \\ -\frac{s}{\sqrt{4+2s^2}} \end{pmatrix}$$

□

Bemerkung: Wenn das Dreibein nicht in Abhängigkeit von der Bogenlänge bestimmt werden muss, kann man auch die folgenden Formeln benutzen:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}}\right|}$$
$$\vec{n} = \frac{\ddot{\vec{x}} - (\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{t})\vec{t}}{\left|\ddot{\vec{x}} - (\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{t})\vec{t}\right|}$$
$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right|}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie zu den folgenden Kurven jeweils das begleitende Dreibein in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

(a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$ mit $t \in [-1, 1]$

(b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 5\sin(t) \\ 4\cos(t) \end{pmatrix}$

(d) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{2}\ln\big(\cos(t)\big) \\ \tan(t) - t \end{pmatrix}$ mit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Lösung: (a) Die Ableitung der Kurve ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t} \\ -\sqrt{1-t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

für die Bogenlänge erhalten wir somit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(1+\tau) + (1-\tau) + \frac{1}{4}}d\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{9}{4}}d\tau = \frac{3}{2}t.$$

Also ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}s\right)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}s\right)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{3}s \end{pmatrix}.$$

Für den Tangentenvektor erhalten wir

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{2}{3}s} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}s} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9\sqrt{1+\frac{2}{3}s}} \\ \frac{2}{9\sqrt{1-\frac{2}{3}s}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\frac{2}{9}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{3}s}+\frac{1}{1-\frac{2}{3}s}} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}s+1+\frac{2}{3}s}{(1+\frac{2}{3}s)(1-\frac{2}{3}s)}} = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{(1+\frac{2}{3}s)(1-\frac{2}{3}s)}}.$$

Der Hauptnormalvektor ist also

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{2}{3}s} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{2}{3}s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}s} \\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir noch den Binormalvektor als Kreuzprodukt.

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}s} \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}s} \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{2}{3}s\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{2}{3}s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{27}s} \\ \sqrt{\frac{1}{18}-\frac{1}{27}s} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Die Ableitung der Kurve ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

für die Bogenlänge erhalten wir somit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau) + 1} d\tau = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = \sqrt{2}t.$$

Also ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}s \end{pmatrix}.$$

Für den Tangentenvektor erhalten wir

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) + \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right)} = \frac{1}{2}.$$

Der Hauptnormalvektor ist also

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir noch den Binormalvektor als Kreuzprodukt.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(c) Die Ableitung der Kurve ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 5\cos(t) \\ -4\sin(t) \end{pmatrix},$$

für die Bogenlänge erhalten wir somit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{9\sin^2(\tau) + 25\cos^2(\tau) + 16\sin^2(\tau)}d\tau = \int_0^t 5d\tau = 5t.$$

Also ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 3\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ 5\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ 4\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \end{pmatrix}.$$

Für den Tangentenvektor erhalten wir

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\frac{4}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{25}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\frac{1}{5}\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\frac{4}{25}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\frac{1}{25}\sqrt{9\cos^2\left(\frac{1}{5}s\right) + 25\sin^2\left(\frac{1}{5}s\right) + 16\cos^2\left(\frac{1}{5}s\right)} = \frac{1}{5}.$$

Der Hauptnormalvektor ist also

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{5}s\right) \\ -\frac{4}{5}\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir noch den Binormalvektor als Kreuzprodukt.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\cos^2\left(\frac{1}{5}s\right) - \frac{4}{5}\sin^2\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \frac{12}{25}\sin\left(\frac{1}{5}s\right)\cos\left(\frac{1}{5}s\right) - \frac{12}{25}\sin\left(\frac{1}{5}s\right)\cos\left(\frac{1}{5}s\right) \\ \frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{1}{5}s\right) + \frac{3}{5}\cos^2\left(\frac{1}{5}s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(d) Die Ableitung der Kurve ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \\ \frac{1}{\cos^2(t)} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\tan(t) \\ \tan^2(t) \end{pmatrix},$$

für die Bogenlänge erhalten wir somit

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + 2\tan^2(\tau) + \tan^4(\tau)}d\tau = \int_0^t 1 + \tan^2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{\cos^2(\tau)}d\tau = \tan(t). \end{aligned}$$

Also ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \arctan(s) \\ -\sqrt{2}\ln\Big(\cos\big(\arctan(s)\big)\Big) \\ s - \arctan(s) \end{pmatrix}.$$

Wegen der Beziehung $a\ln(x) = \ln(x^a)$ ist $-\sqrt{2}\ln(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ und somit

$$\begin{aligned} \vec{x}(s) &= \begin{pmatrix} \arctan(s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{\cos^2\big(\arctan(s)\big)}\right) \\ s - \arctan(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \arctan(s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big(1 + \tan^2\big(\arctan(s)\big)\Big) \\ s - \arctan(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan(s) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+s^2) \\ s - \arctan(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Tangentenvektor erhalten wir

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s^2} \\ \sqrt{2}\frac{s}{1+s^2} \\ 1 - \frac{1}{1+s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s^2} \\ \sqrt{2}\frac{s}{1+s^2} \\ \frac{s^2}{1+s^2} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{2s}{(1+s^2)^2} \\ \sqrt{2}\frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} \\ \frac{2s}{(1+s^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors ist

$$\frac{\sqrt{4s^2 + 2(1-s^2)^2 + 4s^2}}{(1+s^2)^2} = \frac{\sqrt{2 + 4s^2 + 2s^4}}{(1+s^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1+s^2}.$$

Der Hauptnormalvektor ist also

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}s}{1+s^2} \\ \frac{1-s^2}{1+s^2} \\ \frac{\sqrt{2}s}{1+s^2} \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir noch den Binormalvektor als Kreuzprodukt.

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{2s^2 - s^2(1-s^2)}{(1+s^2)^2} \\ \frac{-\sqrt{2}s^3 - \sqrt{2}s}{(1+s^2)^2} \\ \frac{1-s^2+2s^2}{(1+s^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{1+s^2} \\ -\frac{\sqrt{2}s}{1+s^2} \\ \frac{1}{1+s^2} \end{pmatrix} \qquad \square$$