Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
3. Mai 2013

***Aufgabe 1.** Berechnen Sie zur Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ 2\sin^2(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Bogenlänge und stellen Sie die Kurve in Abhängigkeit von der Bogenlänge dar. Berechnen Sie anschließend den Tangentenvektor in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

Lösung: Für die Bogenlänge benötigen wir zunächst die Ableitungen der beiden Koordinaten.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ 4\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Bogenlänge anhand dieser Werte. Dabei beginnen wir mit unserer Berechnung zum Zeitpunkt $t = 0$, setzen also $s(0) = 0$.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\big(-2\cos(\tau)\sin(\tau)\big)^2 + \big(4\cos(\tau)\sin(\tau)\big)^2} d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{20\cos^2(\tau)\sin^2(\tau)} d\tau \\ &= \sqrt{20}\int_0^t \big|\cos(\tau)\big| \cdot \big|\sin(\tau)\big| d\tau \end{aligned}$$

Weil t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, sind sowohl Cosinus als auch Sinus nicht negativ, wir haben also

$$s(t) = \sqrt{20}\int_0^t \cos(\tau)\sin(\tau) d\tau = \sqrt{20}\left[\frac{1}{2}\sin^2(\tau)\right]_0^t = \sqrt{5}\sin^2(t).$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Wenn wir nun s als Parameter verwenden wollen, müssen wir t in Abhängigkeit von s darstellen. Dies ist nicht schwer.

$$
\begin{aligned}
& & s &= \sqrt{5}\sin^2(t) \\
\Longleftrightarrow & & \frac{s}{\sqrt{5}} &= \sin^2(t) \\
\Longleftrightarrow & & \sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}} &= \sin(t) \\
\Longleftrightarrow & & \arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}\right) &= t
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir diesen Ausdruck in die Definition der Kurve ein.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}\right)\right) \\ 2\sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}\right)\right) \\ 2\sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}^2 \\ 2\sqrt{\frac{s}{\sqrt{5}}}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\frac{s}{\sqrt{5}} \\ 2\frac{s}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Tangentenvektor ist nun die Ableitung dieses Ausdruckes nach s.

$$
\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
$$

Die Richtung ist also konstant, es handelt sich bei der Kurve somit um ein Geradenstück. □

Aufgabe 2. Berechnen Sie zu folgenden Kurven die Bogenlänge und stellen Sie die Kurven in Abhängigkeit von der Bogenlänge dar. Berechnen Sie anschließend den Tangentenvektor in Abhängigkeit von der Bogenlänge.

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}$

Lösung: (a) Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

Für die Bogenlänge erhalten wir damit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+\tau}\, d\tau = \left[\frac{2}{3}(1+\tau)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.$$

Nun lösen wir diese Gleichung nach t auf.

$$\begin{aligned} & & s &= \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \\ \Longleftrightarrow & & s + \frac{2}{3} &= \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \\ \Longleftrightarrow & & \frac{3}{2}s + 1 &= (1+t)^{\frac{3}{2}} \\ \Longleftrightarrow & & \left(\frac{3}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}} &= 1+t \\ \Longleftrightarrow & & \left(\frac{3}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}} - 1 &= t \end{aligned}$$

In die Definition der Kurve eingesetzt erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \\ \frac{2}{3}\left(\left(\frac{3}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir noch die Ableitung nach s.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}s+1\right)^{-\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\left(\frac{3}{2}s+1\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}s+1\right)^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

(b) Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Für die Bogenlänge erhalten wir damit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{e^{4\tau} + e^{6\tau}} d\tau = \int_0^t e^{2\tau} \sqrt{1 + e^{2\tau}} d\tau$$

Hier substituieren wir $u = e^{2\tau}$, also $du = 2e^{e\tau} d\tau$. Dadurch erhalten wir

$$s(t) = \int_1^{e^{2t}} \frac{1}{2} \sqrt{1+u} du = \left[\frac{1}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^{2t}} = \frac{1}{3}(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{8}.$$

Nun lösen wir diese Gleichung nach t auf.

$$\begin{aligned}
& & s &= \frac{1}{3}(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt{8} \\
&\Longleftrightarrow & s + \frac{1}{3}\sqrt{8} &= \frac{1}{3}(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} \\
&\Longleftrightarrow & 3s + \sqrt{8} &= (1+e^{2t})^{\frac{3}{2}} \\
&\Longleftrightarrow & \left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} &= 1 + e^{2t} \\
&\Longleftrightarrow & \left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 &= e^{2t} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{2} \ln\left(\left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) &= t
\end{aligned}$$

In die Definition der Kurve eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{\ln\left(\left(3s+\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \\ \frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}\ln\left(\left(3s+\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\left(\left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir noch die Ableitung nach s.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(3s + \sqrt{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\left(3s + \sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} \cdot \left(3s + \sqrt{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

Für die Bogenlänge erhalten wir damit

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)}d\tau = \int_0^t 1d\tau = [\tau]_0^t = t.$$

In diesem Fall haben wir also $s = t$ (was, da es sich bei der Kurve um einen Kreis handelt, auch nicht sonderlich überraschend ist), weshalb auch

$$\begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$$

gilt. Dementsprechend ist auch

$$\begin{pmatrix}\frac{dx}{ds}\\ \frac{dy}{ds}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}.$$

(d) Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \sinh(t)\end{pmatrix}$$

Für die Bogenlänge erhalten wir damit

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\tau)}d\tau = \int_0^t \sqrt{\cosh^2(\tau)}d\tau = \int_0^t \cosh(\tau)d\tau\\ &= [\sinh(\tau)]_0^t = \sinh(t).\end{aligned}$$

Nun lösen wir diese Gleichung nach t auf.

$$\begin{aligned} && s &= \sinh(t)\\ \iff && \operatorname{arsinh}(s) &= t\end{aligned}$$

In die Definition der Kurve eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\operatorname{arsinh}(s)\\ \cosh(\operatorname{arsinh}(s))\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\operatorname{arsinh}(s)\\ \sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(s))}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\operatorname{arsinh}(s)\\ \sqrt{1 + s^2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun berechnen wir noch die Ableitung nach s.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}.$$

(e) Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Für die Bogenlänge erhalten wir damit

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{16\tau^2 + \tau^4} d\tau = \int_0^t \tau\sqrt{16 + \tau^2} d\tau \\ &= \left[\frac{1}{3}(16+\tau^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \frac{1}{3}(16+t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Nun lösen wir diese Gleichung nach t auf.

$$\begin{aligned} && s &= \frac{1}{3}(16+t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{64}{3} \\ \iff && s + \frac{64}{3} &= \frac{1}{3}(16+t^2)^{\frac{3}{2}} \\ \iff && 3s + 64 &= (16+t^2)^{\frac{3}{2}} \\ \iff && (3s+64)^{\frac{2}{3}} &= 16 + t^2 \\ \iff && \sqrt{(3s+64)^{\frac{2}{3}} - 16} &= t \end{aligned}$$

In die Definition der Kurve eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{(3s+64)^{\frac{2}{3}} - 16}^{\,2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{(3s+64)^{\frac{2}{3}} - 16}^{\,3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(3s+64)^{\frac{2}{3}} - 32 \\ \frac{1}{3}\left((3s+64)^{\frac{2}{3}} - 16\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir noch die Ableitung nach s.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3s+64)^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{(3s+64)^{\frac{2}{3}} - 16} \cdot (3s+64)^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

$\square$