Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

26. April 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 4x_3\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_2 + x_3\\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - x_2 - 4x_3\end{aligned}$$

Lösung: In Matrix-Schreibweise lautet das System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & -1 & -4\end{pmatrix}\vec{x} = A\vec{x}.$$

Für die allgemeine Lösung müssen wir zuerst die Eigenwerte von A bestimmen. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4\\ 2 & 2-\lambda & 1\\ -2 & -1 & -4-\lambda\end{vmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-4-\lambda) + 0 + (-8) - (\lambda-1) - 0 - (8\lambda - 16)\\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1).\end{aligned}$$

Die Nullstellen hiervon bestimmt man wie immer, in unserem Fall haben wir die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Nun benötigen wir die Eigenvektoren. Wir beginnen mit $\lambda_1 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & -5 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sind also von der Form $c_1\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nun betrachten wir den zweiten Eigenwert. Falls dieser zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ hat, ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\vec{x} = c_1 e^t \vec{v}_1 + c_2 e^{-t}\vec{v}_2 + c_3 e^{-t}\vec{v}_3$. Wir rechnen nach.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind also Vielfache von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es gibt somit keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

In diesem Fall suchen wir eine Lösung der Form

$$\vec{x} = e^{-t} \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} = te^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$\dot{\vec{x}} = e^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} - te^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = -te^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \\ e-f \end{pmatrix}.$$

Andererseits soll die Funktion auch die Differentialgleichung erfüllen, es muss daher

$$\begin{aligned} -te^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \\ e-f \end{pmatrix} &= A\vec{x} \\ &= A \left(te^{-t} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \right) \\ &= te^{-t} A \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + e^{-t} A \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gelten, also

$$A \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \\ e-f \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, also

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Für $\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$ müssen wir ein Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} && A \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2c_2 - b \\ c_2 - d \\ c_2 - f \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow && A \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow && (A + I_3) \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow && (A - (-1)I_3) \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir wie gewohnt.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 4 & -2c_2 \\ 2 & 3 & 1 & c_2 \\ -2 & -1 & -3 & c_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 4 & -2c_2 \\ 0 & 3 & -3 & 3c_2 \\ 0 & -1 & 1 & -c_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & -c_2 \\ 0 & 1 & -1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können hier $f = c_3$ setzen, daraus folgt $d = c_2 + c_3$ und $b = -c_2 - 2c_3$. Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also

$$\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 - 2c_3 \\ c_2 + c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Somit haben wir für unser System von Differentialgleichungen die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\vec{x} &= e^t \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -2c_2t - c_2 - 2c_3 \\ c_2t + c_2 + c_3 \\ c_2t + c_3 \end{pmatrix} \\ &= c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^{-t} \begin{pmatrix} -2t-1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} + c_3e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Systeme von Differentialgleichungen.

(a)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_3 \\ \dot{x}_2 &= 5x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 3x_3\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_3\end{aligned}$$

Lösung: (a) Dieses System entspricht in Matrixschreibweise

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} = A\vec{x}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$.

Wir berechnen zuerst die Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind also von der Form $c_1\vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Nun suchen wir die Eigenvektoren zum Eigenwert 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&4&0\\0&0&0&0\\1&0&-2&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&4&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Zum Eigenwert 5 haben wir also zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, der allgemeine Eigenvektor hat die Form $c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$.

Die allgemeine Lösung des Systems ist also

$$\vec{x} = c_1e^x\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + c_2e^{5x}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + c_3e^{5x}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(b) Dieses System entspricht in Matrixschreibweise

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}0&2&-1\\2&-1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}\vec{x} = A\vec{x}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Wir suchen zuerst die Eigenvektoren zum Eigenwert -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-1&0\\2&1&1&0\\2&-1&5&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&-3&6&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-1&0\\0&-1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Setzen wir die letzte Koordinate 1, folgt, dass die zweite Koordinate 2 und die erste $-\frac{3}{2}$ ist. Um ganze Zahlen zu erhalten, multiplizieren wir die Werte mit 2. Der allgemeine Eigenvektor zum Eigenwert -2 hat also die Form $c_1\vec{v}_1 = c_1\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$.

Nun suchen wir die Eigenvektoren zum Eigenwert 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Alle Eigenvektoren zum Eigenwert 2 sind also Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, es gibt somit keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren.
Wir müssen also den Ansatz

$$\vec{x} = e^{2t} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

wählen. Wie bei Aufgabe 1 erhalten wir, dass $\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist, also

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ -2c_2 \end{pmatrix}.$$

Für die restlichen Koeffizienten müssen wir das Gleichungssystem

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ -2c_2 \end{pmatrix}$$

lösen, wie in Aufgabe 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & c_2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2c_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es muss als $d = -c_2$ gelten. Für b können wir eine Konstante c_3 setzen, daraus folgt dann $f = -3c_2 - 2c_3$. Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also

$$\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_2 \\ -3c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}.$$

Als allgemeine Lösung des Systems erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\vec{x} &= c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} c_2 t + c_3 \\ -c_2 \\ -2c_2 t - 3c_2 - 2c_3 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ -2t - 3 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Dieses System entspricht in Matrixschreibweise

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = A\vec{x}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$. Da wir keine doppelten Nullstellen haben, müssen wir lediglich die Eigenvektoren berechnen.

Zunächst berechnen wir die Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind also von der Form $c_1\vec{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Als nächstes berechnen wir die Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind also von der Form $c_2\vec{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zuletzt berechnen wir die Eigenvektoren zum Eigenwert 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 3 sind also von der Form $c_3\vec{v}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung des Systems ist somit

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$