Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

19. April 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie eine Lösung von

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = (x^2 + x)e^x$$

mit Hilfe eines speziellen Ansatzes.

Lösung: Zunächst geben wir noch einmal die Liste der speziellen Ansätze an.

Störfunktion	**Ansatz für** $y_I(x)$
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x}P(x)$	$e^{\lambda x}Q(x)$
$\sin(\alpha x)$ $\cos(\alpha x)$ $a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)$	$c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)$
$ae^{\lambda x}\sin(\alpha x)$ $ae^{\lambda x}\cos(\alpha x)$ $e^{\lambda x}\big(a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)\big)$	$e^{\lambda x}\big(c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)\big)$
$P(x)\sin(\alpha x)$ $P(x)\cos(\alpha x)$ $P(x)\sin(\alpha x) + Q(x)\cos(\alpha x)$	$R(x)\sin(\alpha x) + S(x)\cos(\alpha x)$

Hierbei sind $a, b, c, d, \lambda, \alpha$ Konstanten und
$P(x), Q(x), R(x), S(x)$ Polynome vom Grad m.

Unser Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = (ax^2 + bx + c)e^x$. Da $\lambda = 1$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1$ ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Die Ableitungen von y_I sehen wie

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

folgt aus:

$$\begin{aligned}
y_I' &= (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x \\
&= (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x, \\
y_I'' &= (2ax+(2a+b))e^x + (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x \\
&= (ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c))e^x, \\
y_I''' &= (2ax+(4a+b))e^x + (ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c))e^x \\
&= (ax^2+(6a+b)x+(6a+3b+c))e^x, \\
y_I^{(4)} &= (2ax+(6a+b))e^x + (ax^2+(6a+b)x+(6a+3b+c))e^x \\
&= (ax^2+(8a+b)x+(12a+4b+c))e^x
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die linke Seite der Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&(ax^2+(8a+b)x+(12a+4b+c))e^x \\
&+(4ax^2+(24a+4b)x+(24a+12b+4c))e^x \\
&+(6ax^2+(24a+6b)x+(12a+12b+6c))e^x \\
&+(4ax^2+(8a+4b)x+(4b+4c))e^x + (ax^2+bx+c)e^x \\
=&(16ax^2+(64a+16b)x+(48a+32b+16c))e^x.
\end{aligned}$$

Da dies $(x^2+x)e^x$ entsprechen soll, haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
16a &= 1, \\
64a+16b &= 1, \\
48a+32b+16c &= 0.
\end{aligned}$$

Wir berechnen $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{1}{16}(1-64a) = -\frac{3}{16}$ und $c = \frac{1}{16}(-48a-32b) = -3a-2b = \frac{3}{16}$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y_I = \frac{1}{16}(x^2-3x+3)e^x. \qquad \square$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils eine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 14\sin(2x) - 18\cos(2x)$

(b) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 25x^2 + 12$

(d) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(e) $y'' - 2y' + y = 10e^x + 2\sin(x)$

Lösung: (a) Der Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = a\sin(2x) + b\cos(2x)$. Da $\alpha i = 2i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Die Ableitungen von y_I sind

$$\begin{aligned} y_I' &= 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x), \\ y_I'' &= -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x). \end{aligned}$$

In die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} &-4a\sin(2x) - 4b\cos(2x) - 6a\cos(2x) \\ &+6b\sin(2x) + 2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) = (-2a+6b)\sin(2x) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (-6a-2b)\cos(2x). \end{aligned}$$

Dies soll $14\sin(2x) - 18\cos(2x)$ entsprechen, also

$$(-2a+6b) = 14 \quad \text{und} \quad (-6a-2b) = -18.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen lösen, erhalten wir $a = 2$ und $b = 3$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y_I = 2\sin(2x) + 3\cos(2x).$$

(b) Der Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = ae^{4x}$. Da $\lambda = 4$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 3\lambda - 10$ ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Die Ableitungen von y_I sind

$$y_I' = 4ae^{4x} \quad \text{und} \quad y_I'' = 16ae^{4x}.$$

In die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$16ae^{4x} + 12ae^{4x} - 10ae^{4x} = 18ae^{4x}.$$

Dies soll $6e^{4x}$ entsprechen, also

$$18a = 6$$

und somit $a = \frac{1}{3}$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y_I = \frac{1}{3}e^{4x}.$$

(c) Der Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = ax^2 + bx + c$. Da $\lambda = 0$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Die Ableitungen von y_I sind

$$y_I' = 2ax + b \quad \text{und} \quad y_I'' = 2a.$$

In die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$2a - 4ax - 2b + 5ax^2 + 5bx + 5c = 5ax^2 + (-4a + 5b)x + (2a - 2b + 5c).$$

Dies soll $25x^2 + 12$ entsprechen, also

$$\begin{aligned} 5a &= 25, \\ -4a + 5b &= 0, \\ 2a - 2b + 5c &= 12. \end{aligned}$$

Wir berechnen $a = 5$, $b = \frac{4}{5}a = 4$ und $c = \frac{1}{5}(12 - 2a + 2b) = 2$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y_I = 5x^2 + 4x + 2.$$

(d) Der Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = (ax + b)e^{-x}$. Allerdings ist $\lambda = -1$ eine (einfache) Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda - 3$. Also verwenden wir den Ansatz $y_I = (ax^2 + bx)e^{-x}$. Die Ableitungen von y_I sind

$$\begin{aligned} y_I' &= (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x}, \\ y_I'' &= (-2ax + (2a - b))e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ &= (ax^2 + (-4a + b)x + (2a - 2b))e^{-x}. \end{aligned}$$

In die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} &(ax^2 + (-4a + b)x + (2a - 2b))e^{-x} \\ &\quad +(2ax^2 + (-4a + 2b)x - 2b)e^{-x} \\ &\qquad\qquad +(-3ax^2 - 3bx)e^{-x} = -8axe^{-x} + (2a - 4b)e^{-x}. \end{aligned}$$

Dies soll $64xe^{-x}$ entsprechen, also

$$-8a = 64 \quad \text{und} \quad 2a - 4b = 0.$$

Wir erhalten $a = -8$ und $b = \frac{1}{2}a = -4$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y_I = (-8x^2 - 4x)e^{-x}.$$

(e) Der Kandidat für einen speziellen Ansatz ist $y_I = ae^x + b\sin(x) + c\cos(x)$. Allerdings ist $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Also müssen wir den ersten Summanden mit x^2 multiplizieren und erhalten $y_I = ax^2e^x + b\sin(x) + c\cos(x)$. Weil $\alpha i = i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Die Ableitungen von y_I sind

$$\begin{aligned} y_I' &= (ax^2 + 2ax)e^x + b\cos(x) - c\sin(x), \\ y_I'' &= (ax^2 + 4ax + 2a)e^x - b\sin(x) - c\cos(x). \end{aligned}$$

In die linke Seite der Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} &(ax^2 + 4ax + 2a)e^x - b\sin(x) - c\cos(x) \\ &-(2ax^2 + 4ax)e^x - 2b\cos(x) + 2c\sin(x) \\ &\qquad\qquad +ax^2e^x + b\sin(x) + c\cos(x) = 2ae^x + 2c\sin(x) - 2b\cos(x). \end{aligned}$$

Dies soll $10e^x + 2\sin(x)$ entsprechen, also ist $a = 5$, $b = 0$ und $c = 1$. Eine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y_I = 5x^2e^x + \cos(x).$$

□

Aufgabe 3. Geben Sie die speziellen Ansätze für die Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

(a) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = (x^2 + x)e^x$

(b) $y'' - 2y' + y = 5x\sin(2x) + x^2e^x$

(c) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$

(d) $y'' - 2y' + 2y = 8e^x\sin(x)$

Lösung: (a) Der Kandidat für den Ansatz aus der Liste ist $y_I = (ax^2 + bx + c)e^x$. Allerdings ist $\lambda = 1$ eine vierfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$, wir müssen daher mit x^4 multiplizieren. Der Ansatz lautet also $y_I = (ax^6 + bx^5 + cx^4)e^x$.

(b) Die Störfunktion ist Summe von Funktionen aus der Liste, der Kandidat für den Ansatz ist daher $y_I = (ax + b)\sin(2x) + (cx + d)\cos(2x) + (ex^2 + fx + g)e^x$. Allerdings ist $\lambda = 1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, wir müssen deshalb den letzten Summanden mit x^2 multiplizieren. Da $\alpha i = 2i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, können die anderen Summanden verbleiben. Der Ansatz lautet also $y_I = (ax + b)\sin(2x) + (cx + d)\cos(2x) + (ex^4 + fx^3 + gx^2)e^x$.

(c) Der Kandidat für den Ansatz aus der Liste ist $y_I = (ax + b)e^x$. Allerdings ist $\lambda = 1$ eine (einfache) Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, wir müssen daher mit x multiplizieren. Der Ansatz lautet also $y_I = (ax^2 + bx)e^x$.

(d) Der Kandidat für den Ansatz aus der Liste ist $y_I = e^x(a\sin(x) + b\cos(x))$. Allerdings ist $\lambda + \alpha i = 1 + i$ eine (einfache) Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 2\lambda + 2$, wir müssen daher mit x multiplizieren. Der Ansatz lautet also $y_I = xe^x(a\sin(x) + b\cos(x))$. □