Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

22. März 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie durch Hauptachsentransformation Lage und Typ der Kegelschnitte

(a) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 - 5 = 0$,

(b) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 - 6 = 0$,

(c) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 - 7 = 0$.

Lösung: Bei einer Hauptachsentransformation schreiben wir die Gleichung zunächst in die Form $\vec{x}^t A\vec{x} + \vec{p}^t\vec{x} + f = 0$ um, wobei A eine symmetrische Matrix ist. Der Eintrag A_{11} entspricht daher dem Koeffizienten von x_1^2, der Eintrag A_{22} dem Koeffizienten von x_2^2 und die beiden restlichen Einträge der Hälfte des Koeffizienten vorn x_1x_2. In unserem Fall haben wir also

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und $f = -5, -6, -7$.

Die Matrix A hat Determinante -4, ist also invertierbar. Die Hauptachsentransformation besteht nun aus folgenden Schritten:

1. Wähle $\vec{q}$ so, dass die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ zu einer Gleichung

   $$\vec{y}^t A\vec{y} + C = 0$$

   mit einer Konstanten C führt. Dies geschieht bei der Wahl

   $$\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}.$$

   Dabei ist

   $$C = \vec{q}^t A\vec{q} + \vec{p}^t\vec{q} + f.$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

2. Finde eine orthogonale Matrix S, so dass S^tAS eine Diagonalmatrix D ist. Dabei soll S so gewählt werden, dass es einer Drehmatrix entspricht, also
$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Dann substituiert man $\vec{y} = S\vec{z}$ und erhält die Gleichung
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0,$$
Wobei λ_1, λ_2 die Diagonalelemente von D sind.

3. Anhand der Werte von C, λ_1 und λ_2 kann man entscheiden, ob es sich um eine Ellipse, Hyperbel, einen einzelnen Punkt oder zwei Geraden handelt.

Wir gehen diese Schritte nun für unseren Fall durch und zeigen, wie man die eine oder andere Berechnung einfacher machen kann.

Zuerst brauchen wir die Inverse von A. Die Determinante haben wir oben bereits als -4 bestimmt, die Inverse ist daher

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir $\vec{q}$ bestimmen:

$$\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Den Vektor $\vec{q}$ merken wir uns. Nun können wir auch gleich die Konstante C bestimmen. Die obige Formel für C lässt sich allerdings noch vereinfachen:

$$\begin{aligned} C &= \vec{q}^t A\vec{q} + \vec{p}^t\vec{q} + f \\ &= \vec{q}^t A\left(-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}\right) + \vec{p}^t\vec{q} + f \\ &= -\frac{1}{2}\vec{q}^t\vec{p} + \vec{p}^t\vec{q} + f. \end{aligned}$$

Beim Skalarprodukt ist die Reihenfolge der Vektoren egal, es ist also $\vec{q}^t\vec{p} = \vec{p}^t\vec{q}$ und somit
$$C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f.$$

In unserem Fall ist also

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} + f = 6 + f.$$

Für (a) haben wir also $C = 1$, für (b) $C = 0$ und für (c) $C = -1$. Die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ vereinfacht die Gleichung also zu $\vec{y}^t A\vec{y} + C = 0$.

Nun beginnen wir den zweiten Schritt. Die Matrix S finden wir, indem wir die Eigenvektoren von A bestimmen. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

seine Nullstellen sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$. Für den Eigenwert 4 finden wir einen Eigenvektor, indem wir das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

lösen. Addieren wir hier das Doppelte der ersten Zeile zur zweiten, erhalten wir das System

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

welches die allgemeine Lösung $s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Da wir für die orthogonale Matrix S normierte Eigenvektoren benötigen, wählen wir $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor. Für den Eigenwert -1 verfahren wir ebenso:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Allgemeine Lösung ist $s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und als normierten Eigenvektor wählen wir $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Matrix S ist nun aus den beiden normierten Eigenvektoren zusammen gesetzt, dabei soll $S_{12} = -S_{21}$ sein, damit S eine Drehmatrix ist. Dementsprechend schreiben wir $\vec{v}_2$ in die erste Spalte und $\vec{v}_1$ in die zweite, also

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einer Drehung um einen Winkel φ. Da $\cos\varphi$ dem ersten Eintrag von S entspricht, können wir φ als $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435°$ berechnen.

Allerdings wissen wir noch nicht, welches Vorzeichen φ hat. Dafür berechnen wir den Sinus des berechneten Winkels: $\sin(63.435°) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Dieser ist positiv, der Eintrag S_{21}, welcher $\sin\varphi$ entspricht, ist aber negativ. Also ist $\varphi \approx -63.435°$. Die Diagonalmatrix $D = S^t AS$ hat in der Diagonalen nun als ersten Eintrag λ_2 (da wir $\vec{v}_2$ zuerst hingeschrieben haben) und als zweiten Eintrag λ_1. Die Substitution $\vec{y} = S\vec{z}$ liefern uns also die Gleichung

$$-z_1^2 + 4z_2^2 + C = 0.$$

Im Fall (b) ist $C = 0$. Da wir einen positiven und einen negativen Eigenwert haben, entspricht die Lösungsmenge für $\vec{z}$ zwei Geraden durch den Ursprung, nämlich $z_2 = \pm\frac{1}{2}z_1$ (also zwei Geraden mit Steigung $\pm\frac{1}{2}$). Die Lösungsmenge für das ursprüngliche $\vec{x}$ entspricht dieser Menge um den Winkel φ gedreht und um $\vec{q}$ verschoben.

Im Fall (a) ist $C = 1$. Ein Eigenwert ist positiv, der andere negativ, also ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ eine Hyperbel. Die Gleichung der Hyperbel lautet $z_1^2 - 4z_2^2 = 1$, wir haben also die Scheitelpunkte bei $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ und die Asymptoten sind die beiden Geraden aus dem Fall (b). Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ erhalten wir wieder, indem wir um den Winkel φ drehen und um $\vec{q}$ verschieben.

Im Fall (c) ist $C = -1$ und wir haben ebenfalls eine Hyperbel. Diesmal lautet die Gleichung $4z_2^2 - z_1^2 = 1$ und die Scheitelpunkte liegen bei $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ und $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ erhalten wir erneut durch Drehung um φ und Verschiebung um $\vec{q}$.

Die einzelnen Schritte im allgemeinen Fall noch einmal in der Übersicht:

- Bestimme die Inverse von A durch
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}.$$
- Berechne
$$\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f.$$
- Bestimme die Eigenwerte von A und jeweils einen normierten Eigenvektor.
- Schreibe die beiden Eigenvektoren so in eine Matrix S, dass $S_{12} = -S_{21}$ gilt. (Bemerkung: Da A symmetrisch ist, stehen die Eigenvektoren senkrecht aufeinander und wir können die Reihenfolge immer so wählen, dass die Matrix S die gewünschte Form hat.)

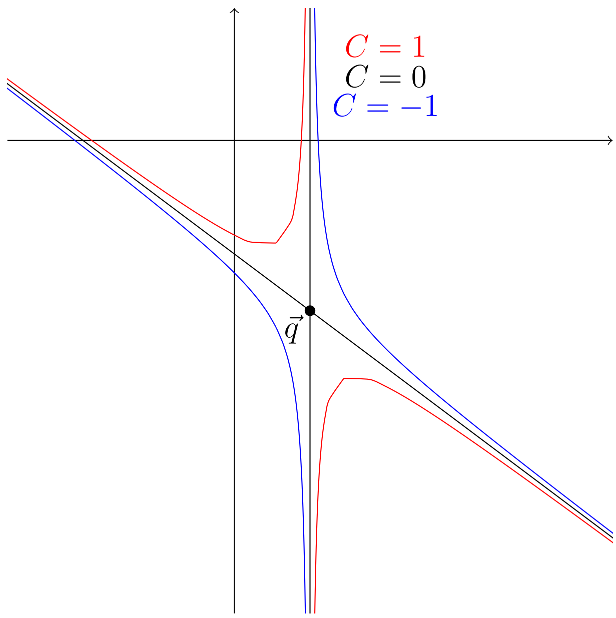

Abbildung 1: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe 1.

- Berechne den Winkel der Drehmatrix S durch $\varphi = \pm \arccos(S_{11})$. Das Vorzeichen bestimmen wir, indem wir $\sin(\arccos(S_{11}))$ berechnen. Stimmt dies mit S_{21} überein, ist das Vorzeichen positiv, ansonsten negativ.

- Der Eigenwert zum ersten Spaltenvektor von S sei λ_1, der andere Eigenwert sei λ_2. Die Lösungsmenge für $\vec{z}$ ergibt sich wie folgt.

  - Falls $C = 0$ und λ_1, λ_2 das gleiche Vorzeichen haben, besteht die Lösungsmenge nur aus dem Ursprung.
  - Falls $C = 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben, besteht die Lösungsmenge aus zwei Geraden durch den Ursprung mit Steigung $\pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$.
  - Falls λ_1, λ_2 das gleiche Vorzeichen haben und C ein anderes Vorzeichen hat, ist die Lösungsmenge eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{-\frac{C}{\lambda_1}}$ und $\sqrt{-\frac{C}{\lambda_2}}$.
  - Falls alle drei Werte das gleiche Vorzeichen haben, gibt es keine Lösung.
  - Falls $C \neq 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben, dann ist die Lösungsmenge eine Hyperbel. Die Scheitelpunkte liegen bei

$\left(-\sqrt{-\frac{C}{\lambda_1}}, 0\right)$ und $\left(\sqrt{-\frac{C}{\lambda_1}}, 0\right)$, beziehungsweise bei $\left(0, -\sqrt{-\frac{C}{\lambda_2}}\right)$ und $\left(0, \sqrt{-\frac{C}{\lambda_2}}\right)$, je nachdem ob $-\frac{C}{\lambda_1}$ oder $-\frac{C}{\lambda_2}$ positiv ist.

- Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die für $\vec{z}$ um den Winkel φ gedreht und um $\vec{q}$ verschoben.

Bemerkung: In der Aufgabe ist Lage und Typ des Kegelschnittes zu bestimmen. Die Zeichnung und die Angabe der Asymptoten und Scheitelpunkte ist also zur Lösung der Aufgabe nicht notwendig. □

Aufgabe 2. Bestimmen Sie durch Hauptachsentransformation Lage und Typ der Kegelschnitte

(a) $36x_1^2 - 24x_1x_2 + 29x_2^2 + 48x_1 + 34x_2 - 139 = 0$,

(b) $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 0$,

(c) $x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 1 = 0$,

(d) $-2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 15x_1 + 5x_2 - 4 = 0$,

(e) $-x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1 - 4x_2 - 11 = 0$.

Lösung: (a) In Matrixschreibweise entspricht die Gleichung

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 48 & 34 \end{pmatrix} \vec{x} - 139 = 0.$$

Die Determinante von A ist $36 \cdot 29 - (-12)^2 = 900$, die Inverse von A ist somit

$$A^{-1} = \frac{1}{900} \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f = -180$.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnen wir wie in Aufgabe 1, wir erhalten die Eigenwerte 20 und 45 und dazugehörige Eigenvektoren $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Diese tragen wir in die Matrix

$$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ein.

Der Drehwinkel φ ist $\pm\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx \pm 53.13°$. Durch Berechnen von $\sin(53.13°) = \frac{4}{5}$ sehen wir, dass das Vorzeichen von φ positiv sein muss, also $\varphi \approx 53.13°$.

Wir haben zwei positive Eigenwerte und eine negative Konstante C, die Lösungsmenge für $\vec{z}$ ist also eine Ellipse mit Halbachsen 3 und 2. Die Lösung für $\vec{x}$ ist um 53.13° gedreht und um $\vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschoben.

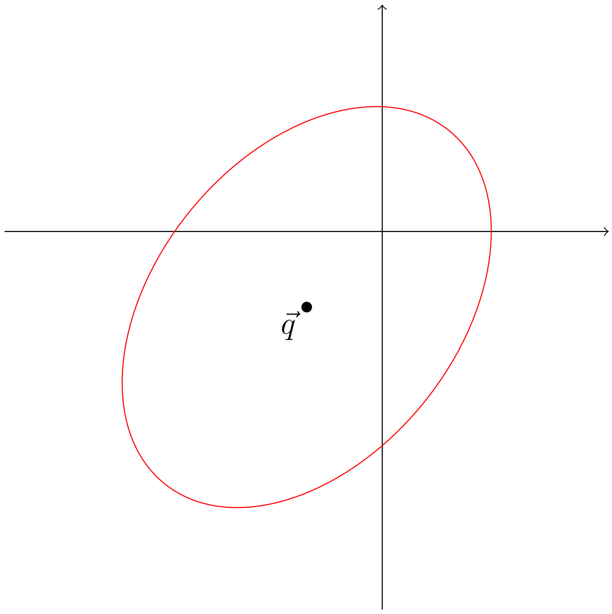

Abbildung 2: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe 2(a).

(b) In Matrixschreibweise entspricht die Gleichung

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = 0.$$

In diesem Fall haben wir keinen linearen Teil und können die ersten beiden Schritte somit auslassen. Wenn wir nun Eigenwerte und Eigenvektoren ausrechnen, erhalten wir dabei keine schönen Werte sondern Eigenwerte

$$\frac{3+\sqrt{10}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{3-\sqrt{10}}{2}$$

und Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2\sqrt{10}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2\sqrt{10}}} \end{pmatrix}.$$

Da $C = 0$ und die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, besteht die Lösungsmenge aus zwei Geraden.

Anstatt durch Einsetzen der Werte den Drehwinkel und die Steigungen der Geraden zu berechnen, können wir es in diesem Fall auch direkt berechnen: Eine Gerade erfüllt $x_2 = ax_1$, setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} & 2x_1^2 - 3ax_1^2 + a^2x_1^2 = 0 \\ \iff \quad & (a^2 - 3a + 2)x_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Da dies für alle x_1 gelten muss, folgt $a^2 - 3a + 2 = 0$. Mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir die beiden Lösungen $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$. Die Lösungsmenge besteht also aus zwei Geraden durch den Ursprung mit Steigung 1 und 2.

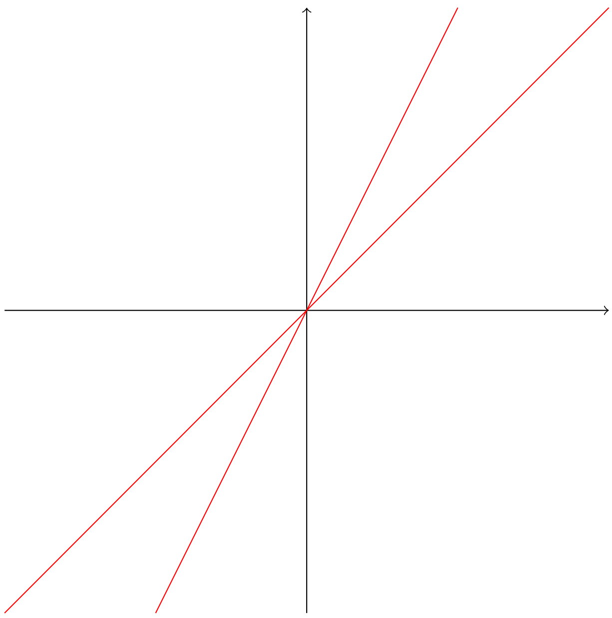

Abbildung 3: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe 2(b).

(c) In Matrixschreibweise entspricht die Gleichung

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} - 1 = 0.$$

Die Inverse von A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

außerdem ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $C = 1$.

Die Matrix A hat Eigenwerte $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, die normierten Eigenvektoren dazu sind $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix S ist also

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel φ ist $45°$.

Da $C \neq 0$ und die Eigenwerte unterschiedliche Vorzeichen haben, liegt eine Hyperbel vor.

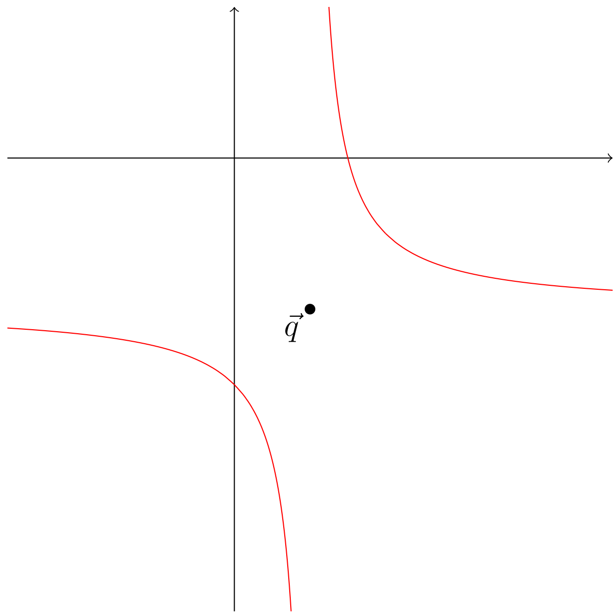

Abbildung 4: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe 2(c).

(d) In Matrixschreibweise entspricht die Gleichung

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -15 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0.$$

Die Inverse von A ist

$$A^{-1} = -\frac{4}{25} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix},$$

außerdem ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = 21$.

Die Matrix A hat Eigenwerte $\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{2}$, die normierten Eigenvektoren dazu sind $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix S ist also

$$S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel ist $\varphi \approx 71.565°$.

Wieder ist $C \neq 0$ und die Eigenwerte haben unterschiedliche Vorzeichen, also ist die Lösungsmenge eine Hyperbel.

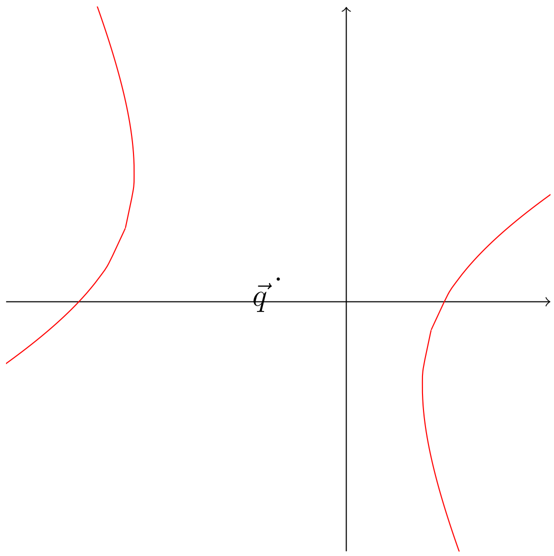

Abbildung 5: Zeichnung zur Lösung von Aufgabe 2(d).

(e) In Matrixschreibweise entspricht die Gleichung

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} - 11 = 0.$$

Die Inverse von A ist

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

außerdem ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $C = 0$.

Die Matrix A ist bereits in Diagonalform, wir müssen daher keine Matrix S bestimmen. Die Eigenwerte sind die Diagonalelemente -1 und -2.

Bei diesem Beispiel ist also $C = 0$ und die Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen. Somit existieren keine Lösungen.

$\square$