Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
15. März 2013

***Aufgabe 1.** Ein Vektor habe die Koordinaten $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ bezüglich zur Basis B. Wie lauten seine Koordinaten bezüglich zur Basis C?

$$B = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\right), \qquad C = \left(\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Lösung: Für die Koordinatentransformation benötigen wir die Transformationsmatrix T, welche die Basis B in die Basis C transformiert. Diese Matrix soll $C = B \cdot T^t$ erfüllen (wenn man B und C als Matrizen auffasst, indem man die Vektoren als Spalten nebeneinander schreibt). Diese Identität ist ein Gleichungssystem mit 9 Unbekannten (im Allgemeinen bei Dimension n sind es n^2 Unbekannte). Dies können wir zum Beispiel lösen, indem wir $\left(B \mid C\right)$ schreiben und das Eliminationsverfahren benutzen.

Wir können aber auch anders vorgehen: Die Matrix einer Basis ist stets invertierbar, es existiert also ein Inverses B^{-1} von B. Multiplizieren wir dieses mit C, ergibt sich

$$B^{-1} \cdot C = B^{-1} \cdot B \cdot T^t = T^t.$$

Wir können die Transformationsmatrix also ausrechnen, indem wir B^{-1} und C multiplizieren. Für die Koordinatentransformation des gegebenen Vektors brauchen wir allerdings das Inverse der Transformationsmatrix. Für dieses gilt

$$(T^t)^{-1} = (B^{-1} \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B,$$

wir müssen also das Inverse von C mit B multiplizieren.

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Wir berechnen nun das Inverse von C. Auch hier haben wir mehrere Möglichkeiten. Wir können (wie im Tutorium der vorigen Woche) das Eliminationsverfahren verwenden oder das Inverse mit Hilfe der Determinante und Adjunkte von C berechnen. Wir wollen hier letzteres benutzen. Für die Determinante von C verwenden wir die Regel von Sarrus.

$$\begin{aligned}\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) \\ &\quad - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 0 + 6 + 6 - 0 - 3 - 8 = 1\end{aligned}$$

Das Inverse von C ist somit

$$\begin{aligned}C^{-1} &= \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} \det(C_{11}) & -\det(C_{21}) & \det(C_{31}) \\ -\det(C_{12}) & \det(C_{22}) & -\det(C_{32}) \\ \det(C_{13}) & -\det(C_{23}) & \det(C_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also ist

$$(T^t)^{-1} = C^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -24 & -9 & -31 \\ 13 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

und somit die Darstellung des Vektors bezüglich zur Basis C

$$(T^t)^{-1}\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 \\ -24 & -9 & -31 \\ 13 & 5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -135 \\ 74 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Transformationsmatrizen für die Koordinatentransformationen zwischen den folgenden Koordinatensystemen.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Lösung: Wie bei der ersten Aufgabe benötigen wir die Inversen der Matrizen B, C, D und E. Wir verwenden wieder die Determinante und Adjunkte. Es ist

$$\begin{aligned}
\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot (-3) \\
&\quad - 3 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) \cdot (-5) - 2 \cdot 2 \cdot (-1) \\
&= -30 - 3 + 18 + 27 - 15 + 4 = 1.
\end{aligned}$$

Die anderen Determinanten rechnet man ebenso aus, wir notieren hier nur die Ergebnisse.

$$\det(C) = -1, \qquad \det(D) = -1 \qquad \text{und} \qquad \det(E) = -1.$$

Die Inverse von B ist also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -18 & -13 & -15 \\ 11 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Die anderen Inversen ergeben sich entsprechend als

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von B zu C haben wir also die Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
T &= (T^t)^t = (B^{-1}C)^t \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -18 & -13 & -15 \\ 11 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right)^t \\
&= \begin{pmatrix} -6 & -4 & -3 \\ -89 & -61 & -53 \\ 54 & 37 & 32 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -6 & -89 & 54 \\ -4 & -61 & 37 \\ -3 & -53 & 32 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den Übergang von B zu D ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (B^{-1}D)^t = \begin{pmatrix} -2 & -35 & 21 \\ -5 & -79 & 48 \\ -6 & -89 & 54 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von B zu E ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (B^{-1}E)^t = \begin{pmatrix} -1 & -18 & 11 \\ -1 & -15 & 9 \\ -1 & -13 & 8 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von C zu B ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (C^{-1}B)^t = \begin{pmatrix} -9 & 14 & -1 \\ -17 & 30 & -6 \\ -29 & 51 & -10 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von C zu D ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (C^{-1}D)^t = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -4 & 8 & -1 \\ 9 & -16 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von C zu E ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (C^{-1}E)^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von D zu B ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (D^{-1}B)^t = \begin{pmatrix} 38 & -7 & -21 \\ 14 & -2 & -9 \\ 27 & -4 & -17 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von D zu C ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (D^{-1}C)^t = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 9 \\ -7 & 2 & 4 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von D zu E ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (D^{-1}E)^t = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von E zu B ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (E^{-1}B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von E zu C ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (E^{-1}C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für den Übergang von E zu D ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T = (E^{-1}D)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist zu beobachten: E ist die Standardbasis, wobei der zweite und dritte Basisvektor vertauscht sind. Dementsprechend sind auch die Transformationsmatrizen von E zu einer der anderen Basen das Transponierte der jeweiligen Matrix mit zwei vertauschten Zeilen. Bei Transformation einer der anderen Basen zu E ist die Situation entsprechend mit dem Inversen der jeweiligen Matrix. $\square$