Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

14. Juni 2013

***Aufgabe 1.** Berechnen Sie durch Übergang zu Polar-, Kugel- oder Zylinderkoordinaten die Fläche bzw. das Volumen

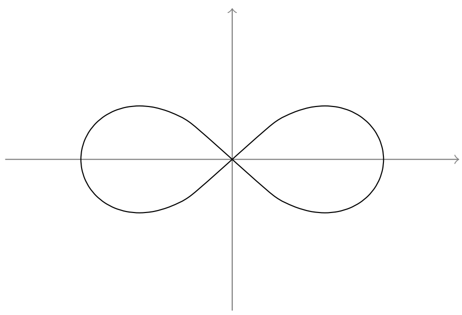
(a) der von der Lemniskate $x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2 = 0$ umschlossenen Fläche und

(b) des Schnitts der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und des Halbraumes $z \leq \frac{R}{2}$.

Lösung: (a) Führen wir hier Polarkoordinaten ein, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi) - \big(r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)\big)^2 = 0 \\ \iff \quad & r^2\big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\big) = r^4 \\ \iff \quad & r^2\cos^2(2\varphi) = r^4, \end{aligned}$$

also $r = 0$ (d.h., der Koordinatenursprung liegt auf der Kurve) oder $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$. Insbesondere darf φ nur solche Werte durchlaufen, für die $\cos(2\varphi)$ nicht negativ ist. Die Kurve sieht wie folgt aus:



Die beiden Teile der Schleife sind offensichtlich gleich groß, wir müssen also nur einen Teil berechnen. Der rechte Teil entspricht den Winkeln

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$, der linke Teil den Winkeln zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$. Der umschlossene Flächeninhalt ist also zweimal der Flächeninhalt des rechten Teils und somit

$$\begin{aligned}
F &= \iint_B dxdx = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} r dr d\varphi \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} dr d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Dabei erhalten wir im Integral den Faktor r durch die Koordinatentransformation in Polarkoordinaten, da dies die dazugehörige Jacobi-Determinante ist. Der Bereich $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ für φ ist zwar nicht im üblichen Bereich $[0, 2\pi]$ für die Polarkoordinaten enthalten, aber auch Polarkoordinaten kann man ebenso mit dem Winkelbereich $[-\pi, \pi]$ (oder jedem anderen Intervall der Länge 2π) verwenden.

(b) Da wir einen Teil einer Kugel betrachten, scheinen zuerst Kugelkoordinaten nahezuliegen. Allerdings ist durch das „Abschneiden“ des oberen Viertels nicht einfach zu auszudrücken, wie sich r in Abhängigkeit von θ (oder umgekehrt) verhält. Daher versuchen wir es stattdessen mit Zylinderkoordinaten. Dabei läuft φ offensichtlich von 0 bis 2π und z von $-R$ bis $\frac{R}{2}$. Weil in Zylinderkoordinaten $r^2 = x^2 + y^2$ gilt, haben wir also $r^2 + z^2 \leq R^2$ und somit läuft r von 0 bis $\sqrt{R^2 - z^2}$. Das Volumen ist also

$$V = \iiint_B dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_{-R}^{\frac{R}{2}} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r dr dz d\varphi.$$

Da weder der Integrand noch eine der inneren Grenzen von φ abhängt, können wir auch gleich zu Beginn über φ integrieren und erhalten daruch lediglich einen Faktor 2φ. Es ist also

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-R}^{\frac{R}{2}} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r dr dz = 2\pi \int_{-R}^{\frac{R}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \\
&= \pi \int_{-R}^{\frac{R}{2}} R^2 - z^2 dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{\frac{R}{2}} \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} R^3 - \frac{1}{24} R^3 + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{9}{8}\pi R^3.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Berechnen Sie mit Hilfe von Polar-, Kugel- oder Zylinderkoordinaten das Integral von

(a) $f(x,y) = 1$ über den Bereich B begrenzt durch $(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0$,

(b) $f(x,y,z) = 1$ über den Schnitt der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ und den Kegel $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$,

(c) $f(x,y,z) = z$ über den Torus $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq S^2$ mit $0 < S < R$,

(d) $f(x,y,z) = 1$ über den Schnitt der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ und des Zylinders $x^2+y^2 \leq A^2$ mit $0 < A < R$,

(e) $f(x,y,z) = \frac{(\sqrt{2}-1)z}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$ über den Schnitt der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ und den Kegel $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$,

Lösung: (a) Dies ist ein zweidimensionaler Bereich, wir verwenden also Polarkoordinaten. Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir

$$r^4 - 2r^3 \cos(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi) = 0,$$

also $r = 0$ oder $r = \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = \cos(\varphi) \pm 1$. Da der Radius nie negativ ist, ist die Begrenzung des Bereichs also durch $r = \cos(\varphi) + 1$ gegeben.

Das Integral ist somit

$$\begin{aligned}
\iint_B dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos(\varphi)+1} r dr d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) + 2\cos(\varphi) + 1 d\varphi.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\cos^2(\varphi)$ erhält man mit partieller Integration: Man schreibt $\cos^2(\varphi) = \cos(\varphi)\cos(\varphi)$ und integriert die beiden Faktoren partiell. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned}
\int \cos^2(\varphi)d\varphi &= \cos(\varphi)\sin(\varphi) - \int \big(-\sin(\varphi)\big)\sin(\varphi)d\varphi \\
&= \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \int \sin^2(\varphi)d\varphi \\
&= \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \int 1 - \cos^2(\varphi)d\varphi \\
\iff \quad 2\int \cos^2(\varphi)d\varphi &= \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi \\
\iff \quad \int \cos^2(\varphi)d\varphi &= \frac{1}{2}\big(\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi\big).
\end{aligned}$$

Unser Integral ist also

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\big(\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \varphi\big) + 2\sin(\varphi) + \varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

Hierbei sieht man, dass sich beim Einsetzen der Grenzen alle Teile, die aus Sinus und Cosinus bestehen, wegkürzen, da sie an der oberen un unteren Grenze identische Werte haben.

(b) Hier sollten wir Kugelkoordinaten versuchen. Die Gleichung des Kegels wird in Kugelkoordinaten zu

$$r\cos(\theta) \geq \sqrt{r^2\sin^2(\theta)} = r|\sin(\theta)|,$$

was im Bereich $[0, \pi]$, den θ bei Kugelkoordinaten durchläuft, genau für $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ der Fall ist. Unser Integral ist somit

$$\begin{aligned}
\iiint_B dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)d\theta \cdot \int_0^1 r^2dr \\
&= 2\pi \cdot \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

(c) Beim Torus werden Kugelkoordinaten sehr unschön, Zylinderkoordinaten eignen sich hier deutlich besser. Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung des Torus ein, ergibt sich $(r-R)^2+z^2 \leq S^2$, also bilden (r,z) einen Kreis mit Radius S um den Punkt $(R,0)$. Die Grenzen für die einzelnen Koordinaten sind also: 0 bis 2π für φ, $R-S$ bis $R+S$ für r und $-\sqrt{S^2-(r-R)^2}$ bis $\sqrt{S^2-(r-R)^2}$ für z. Alternativ kann man auch den Bereich für z explizit als $-S$ bis S angeben, wobei dann r von $R-\sqrt{S^2-z^2}$ bis $R+\sqrt{S^2-z^2}$ läuft.

Das Integral wird in Zylinderkoordinaten zu

$$\begin{aligned}\iiint_B dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_{R-S}^{R+S}\int_{-\sqrt{S^2-(r-R)^2}}^{\sqrt{S^2-(r-R)^2}} zr dzdrd\varphi \\ &= 2\pi\int_{R-S}^{R+S}\left[\frac{1}{2}rz^2\right]_{-\sqrt{S^2-(r-R)^2}}^{\sqrt{S^2-(r-R)^2}} dr.\end{aligned}$$

Da die obere und untere Grenze für z den gleichen Betrag haben, kürzen sich die Werte beim Einsetzen weg und das Integral ist somit

$$2\pi\int_{R-S}^{R+S} 0dr = 0.$$

(d) Hier haben wir eine Kugel und einen Zylinder, sowohl Kugel- als auch Zylinderkoordinaten scheinen daher geeignet. Für Kugelkoordinaten müssten wir allerdings r in Abhängigkeit von θ ausdrücken, was nicht so simpel aussieht. Daher wählen wir Zylinderkoordinaten. Hierin läuft φ wieder von 0 bis 2π. Da wir uns innerhalb des Zylinders befinden, läuft außerdem r von 0 bis A. Die letzte Koordinate z läuft von $-\sqrt{R^2-r^2}$ bis $\sqrt{R^2-r^2}$. Das Integral ist daher

$$\begin{aligned}\iiint_B dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{A}\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} rdzdrd\varphi \\ &= 2\pi\int_0^A 2r\sqrt{R^2-r^2}dr \\ &= 2\pi\left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^A \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(R^3-(R^2-A^2)^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}$$

(e) In Teil (b) haben wir bereits festgestellt, dass für den angegebenen Bereich Kugelkoordinaten hilfreich sind. Der Integrand ist dann

$$\frac{(\sqrt{2}-1)z}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 = \frac{(\sqrt{2}-1)r\cos(\theta)}{\sqrt{r^2\sin^2(\theta)}} - 1 = (\sqrt{2}-1)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 1.$$

Da wir uns mit θ im Bereich $[0, \frac{\pi}{4}]$ befinden, ist der Sinus nicht negativ und wir müssen beim Auflösen der Wurzel das Vorzeichen nicht beachten.

Das Integral ist also

$$\begin{aligned}
\iiint_B f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\sin(\theta)\left((\sqrt{2}-1)\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 1\right) drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}-1)\cos(\theta) - \sin(\theta)d\theta \cdot \int_0^1 r^2 dr \\
&= \frac{2}{3}\pi\left[(\sqrt{2}-1)\sin(\theta) + \cos(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$