Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

14. Juni 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' - 2y + \frac{y^2}{x} = 1 - x$

(b) $xy - 1 + (x^2 - xy)y' = 0$

Lösung: (a) Bei dieser Differentialgleichung handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung, denn sie ist von der Form $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$.

Hier müssen wir zuerst eine partikuläre Lösung „erraten". Dies kann sehr schwer sein, aber in diesem Fall sehen wir, dass die Funktionen f, g und h allesamt Summen von Potenzen von x sind. Daher liegt es nahe, dass auch die partikuläre Lösung eine (Summe von) Potenz(en) von x sein könnte. Wir setzen also an:

$$y = ax^b$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$abx^{b-1} - 2ax^b + a^2x^{2b-1} = 1 - x.$$

Nun können wir vergleichen, welche Potenzen von x wir haben. Auf der rechten Seite haben wir x^1 und x^0, links haben wir x^b, x^{b-1} und x^{2b-1}, wobei wir bei letzterer noch nicht wissen, ob sie unter Umständen mit einer der anderen Potenzen identisch ist. In jedem Fall ist x^b eine höhere Potenz als x^{b-1}, diese beiden Potenzen sollten also x^1 und x^0 entsprechen, damit die Gleichung erfüllt sein kann. Wir versuchen daher $b = 1$. Damit wird die Gleichung zu

$$a - 2ax + a^2x = 1 - x.$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Koeffizientenvergleich der Konstanten liefert $a = 1$ und Einsetzen zeigt, dass auch die linearen Koeffizienten stimmen. Also ist $y_p = x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Der nächste Schritt ist die Substitution $y = z + y_p$, also $y = z + x$. Damit erhalten wir im Allgemeinen die Differentialgleichung

$$z' + \big(f(x) + 2g(x)y_p(x)\big)z + g(x)z^2 = 0,$$

was eine Bernoullische Differentialgleichung ist. In unserem Fall ist die Gleichung

$$\begin{aligned} z' + \left(-2 + 2\frac{1}{x}x\right) z + \frac{1}{x}z^2 &= 0 \\ \iff \qquad z' + \frac{1}{x}z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung hiervon ist $z = 0$, für den Fall $z \neq 0$ können wir die Differentialgleichung durch Integrieren lösen.

$$\begin{aligned} && z' &= -\frac{1}{x}z^2 \\ &\iff & \frac{z'}{z^2} &= -\frac{1}{x} \\ &\iff & \int \frac{1}{z^2}dz &= -\int \frac{1}{x}dx \\ &\iff & -\frac{1}{z} &= -\ln(x) + c \\ &\iff & z &= \frac{1}{\ln(x) - c} \end{aligned}$$

Für y haben wir also die Lösungen $y = x$ und $y = \frac{1}{\ln(x)-c} + x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) Diese Differentialgleichung ist von der Form

$$\begin{aligned} && P(x,y) + Q(x,y)y' &= 0 \\ &\iff & P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= 0. \end{aligned}$$

Solche Differentialgleichungen sollte man zuerst auf Exaktheit überprüfen. Dazu berechnen wir P_y und Q_x und vergleichen diese. Es ist $P_y = x$ und $Q_x = 2x - y$, die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

Daher wollen wir einen integrierenden Faktor M suchen, so dass $MP + MQy' = 0$ exakt ist. Hierfür muss

$$M \cdot (P_y - Q_x) = M_x \cdot Q - M_y \cdot P$$

sein. (Dies wurde in der Vorlesung berechnet.) In unserem Fall entspricht diese Gleichung

$$M \cdot (y - x) = M_x \cdot (x^2 - xy) - M_y \cdot (xy - 1).$$

So eine Differentialgleichung für M ist im Allgemeinen schwer zu lösen, weil sie partielle Ableitungen enthält. Allerdings sind wir nicht an der allgemeinen Lösung, sondern nur an einer speziellen Lösung interessiert.

Ein möglicher Ansatz hierfür ist anzunehmen, dass M nur von x oder nur von y abhängt, so dass eine der beiden partiellen Ableitungen weg fällt. Versuchen wir es zunächst mit $M = M(x)$. Dann entspricht die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & M \cdot (y - x) = M' \cdot (x^2 - xy) \\ \iff \quad & \frac{M'}{M} = \frac{y - x}{x^2 - xy} = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Beim Ansatz $M = M(y)$ hätten wir

$$\begin{aligned} & M \cdot (y - x) = -M' \cdot (xy - 1) \\ \iff \quad & \frac{M'}{M} = \frac{y - x}{1 - xy} \end{aligned}$$

erhalten, was sich nicht weiter vereinfachen lässt. Der Ansatz $M = M(x)$ ist also besser. Für ihn ergibt sich die Lösung durch Integrieren:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{M} dM = \int -\frac{1}{x} dx \\ \iff \quad & \ln(M) = -\ln(x) \\ \iff \quad & M = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir beim Integrieren eigentlich eine Integrationskonstante hätten verwenden müssen. Da wir aber nur eine spezielle Lösung suchen, können wir die Konstante 0 setzen und sie von Anfang an weg lassen.

Der integrierende Faktor ist also $\frac{1}{x}$, die Differentialgleichung wird dadurch zu

$$y - \frac{1}{x} + (x - y)y' = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist nun exakt, denn $P_y = Q_x = 1$. Wir können also eine Funktion $F(x, y)$ mit $P = F_x$ und $Q = F_y$ bestimmen, indem wir P (nach x) oder Q (nach y) integrieren. Wir wählen den Ansatz über P (der über Q wäre gleichwertig).

$$F = \int y - \frac{1}{x} dx = xy - \ln(x) + \Phi(y)$$

Aus der Bedingung $F_y = Q$ erhalten wir

$$x + \Phi'(y) = x - y,$$

also $\Phi'(y) = -y$ und somit $\Phi(y) = -\frac{1}{2}y^2$. (Auch hier können wir die Integrationskonstante weglassen, da wir nur eine spezielle Lösung suchen.) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist durch die Gleichung $F(x, y) = c$ gegeben, also

$$xy - \ln(x) - \frac{1}{2}y^2 = c$$

gegeben. Diese Gleichung können wir nach y aulösen, es ist

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 2\ln(x) + c}. \qquad \square$$

Bemerkung: Es gibt keine Strategie, die bei Riccatischen Differentialgleichungen grundsätzlich eine partikuläre Lösung liefert. Man kann aber prinzipiell folgende Ansätze versuchen:

- Bestehen f, g und h aus Exponentialfunktionen, versuche man den Ansatz ae^{bx}. Führt der nicht zum Ziel, kann man es mit Summen solcher Exponentialfunktionen versuchen.

- Bestehen sie aus trigonometrischen Funktionen, versuche man $a\cos(x)$, $a\sin(x)$, $a\tan(x)$ oder $a\cot(x)$. Auch hier kann man es mit Summen solcher Ausdrücke versuchen.

- Bestehen sie aus Potenzen von x, versuche man es mit ax^b oder Summen solcher Ausdrücke.

Wählt man einen dieser Ansätze, kann man diesen in die Differentialgleichung einsetzen und dann die Koeffizienten vergleichen. Grundsätzlich ist der Ansatz umso komplizierter zu berechnen, je mehr Summanden man ansetzt. Daher sollte man es zuerst immer mit dem einfachsten Ansatz versuchen.

Bei integrierenden Faktoren ist die Frage, ob man den Ansatz $M = M(x)$ oder $M = M(y)$ wählen soll. Dies sollte man davon abhängig machen, wie die Brüche $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ und $\frac{Q_x - P_y}{P}$ aussehen. Ersteren muss man beim Ansatz $M = M(x)$ nach x integrieren, letzteren beim Ansatz $M = M(y)$ nach y. Man sollte daher den Ansatz wählen, für den der jeweilige Bruch einfacher ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $\sin(x)\tan(y) + 1 + \frac{\cos(x)}{\cos^2(y)} y' = 0$

(b) $y = xy' + y^2$

(c) $y' - 2\tan(x)y + y^2 = 1$

(d) $2x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - y = 0$

(e) $y' + 2xy - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = -x - x^3$

(f) $y = xy' + \sqrt{y'}$

Lösung: (a) Dies ist eine Differentialgleichung der Form $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$. Wir überprüfen zuerst, ob sie exakt ist. Es ist $P_y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(y)}$ und $Q_x = -\frac{\sin(x)}{\cos^2(y)}$, die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Wir suchen nun einen integrierenden Faktor $M(x, y)$. Dieser muss

$$M \cdot 2\frac{\sin(x)}{\cos^2(y)} = M_x \cdot \frac{\cos(x)}{\cos^2(y)} - M_y \cdot (\sin(x)\tan(y) + 1)$$

erfüllen. Der Faktor bei M_x ist dem bei M sehr ähnlich, wir versuchen daher den Ansatz $M = M(x)$. Dann entspricht die Gleichung

$$\begin{aligned} & M \cdot 2\frac{\sin(x)}{\cos^2(y)} = M' \cdot \frac{\cos(x)}{\cos^2(y)} \\ \iff \quad & \frac{M'}{M} = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten M durch Integrieren:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{M} dM = \int 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ \iff \quad & \ln(M) = -2\ln(\cos(x)) \\ \iff \quad & M = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Wir haben also einen integrierenden Faktor $\frac{1}{\cos^2(x)}$ gefunden. Mit diesem multipliziert wird die Differentialgleichung zu

$$\frac{\sin(x)\tan(y) + 1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos(x)\cos^2(y)} y' = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist wegen der Wahl des Faktors exakt, wir können daher durch Integration die Funktion F mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ bestimmen. In diesem Fall ist Q deutlich leichter zu integrieren.

$$F(x,y) = \int \frac{1}{\cos(x)\cos^2(y)} dy = \frac{\tan(y)}{\cos(x)} + \Psi(x)$$

Aus der Bedingung $F_x = P$ erhalten wir

$$\frac{\sin(x)\tan(y)}{\cos^2(x)} + \Psi'(x) = \frac{\sin(x)\tan(y) + 1}{\cos^2(x)},$$

also $\Psi'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und somit $\Psi(x) = \tan(x)$.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch

$$\frac{\tan(y)}{\cos(x)} + \tan(x) = c$$

gegeben. Löst man die Gleichung nach y auf, erhält man

$$y = \arctan\left(c \cdot \cos(x) - \sin(x)\right).$$

(b) Wenn wir die Differentialgleichung zu

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = 0$$

umformen, sehen wir, dass es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung handelt, wobei $\alpha = 2$ ist. Eine Lösung ist hierbei immer $y = 0$. Für $y \neq 0$ multiplizieren wir zuerst mit $y^{-\alpha} = y^{-2}$ und erhalten

$$y^{-2}y' - \frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = 0.$$

Nun substituieren wir $z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$. Dadurch ergibt sich

$$-z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$z_H = c \cdot \exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right) = c \cdot \exp\big(-\ln(x)\big) = \frac{c}{x}.$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir durch

$$z_I = \frac{1}{x} \cdot \int \frac{\frac{1}{x}}{1 \cdot \frac{1}{x}} dx = \frac{1}{x} \cdot \int 1 dx = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$$

Die allgemeine Lösung für z ist also $z = \frac{c}{x} + 1$, für y heißt dies

$$y = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{c}{x} + 1} = \frac{x}{c + x}.$$

(c) Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung, wir brauchen also zuerst eine partikuläre Lösung. Mit dem Ansatz $y = a\cos(x)$ erhalten wir durch einsetzen die Gleichung

$$-a\sin(x) - 2a\sin(x) + a^2\cos^2(x) = 1,$$

die keine Lösung für a liefert. Auch der Ansatz $y = a\sin(x)$ führt nicht zum Ziel. $y = a\tan(x)$ hingegen liefert

$$\begin{aligned}
& a\frac{1}{\cos^2(x)} - 2a\tan^2(x) + a^2\tan^2(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & a\frac{1}{\cos^2(x)} + (a^2 - 2a)\tan^2(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{a + (a^2 - 2a)\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & a + (a^2 - 2a)\sin^2(x) = \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x).
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, dass $a = 1$ die Gleichung erfüllt, eine partikuläre Lösung ist also $y_p = \tan(x)$.

Nun substituieren wir $y = z + y_p = z + \tan(x)$ und erhalten die neue Differentialgleichung

$$z' + z^2 = 0.$$

Diese hat eine Lösung $z = 0$, die anderen Lösungen finden wir durch Integration.

$$\begin{aligned}
& z' + z^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & z' = -z^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{z'}{z^2} = -1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \int \frac{1}{z^2}dz = \int -1dx \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{z} = -x + c_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & z = \frac{1}{x - c_1}
\end{aligned}$$

Wenn wir $c = -c_1$ setzen, erhalten wir also die allgemeine Lösung für y

$$y = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{1}{x+c} + \tan(x).$$

(d) Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung. Hierfür wählen wir die Substitution $x = e^t$ und $v(t) = y(e^t)$. In der Vorlesung wurde berechnet, dass sich hieraus die Beziehungen

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-t} \cdot \dot{v}(t), \\ y''(x) &= e^{-2t} \cdot (\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)), \\ \text{und} \qquad y'''(x) &= e^{-3t} \cdot (\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t)) \end{aligned}$$

ergeben. Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, kürzen sich die Exponentialterme weg und wir erhalten

$$\begin{aligned} & 2\,(\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t)) + 3\,(\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)) + \dot{v}(t) - v(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad & 2\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t) - v(t) = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung lösen wir mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. Dies lautet $2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 1$ und hat die offensichtliche Nullstelle $\lambda = 1$. Dividieren wir das charakteristische Polynom durch $\lambda - 1$, ergibt sich das Polynom $2\lambda^2 - \lambda + 1$, welches die Nullstellen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ hat. Die allgemeine Lösung für v ist also

$$v(t) = c_1 e^t + \left(c_2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + c_3 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) e^{\frac{1}{2}t}.$$

Substuieren wir wieder $x = e^t$ und $y(x) = v(t)$ zurück, ergibt sich

$$y(x) = c_1 x + \left(c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) + c_3 \sin\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)\right) \sqrt{x}.$$

(e) Auch dies ist eine Riccatische Differentialgleichung. Als Ansatz für eine partikuläre Lösung wählen wir hier $y = ax^b$. Eingesetzt erhalten wir die Gleichung

$$abx^{b-1} + 2ax^{b+1} - ax^{b-1} + a^2x^{2b-1} = -x - x^3.$$

Nach Vergleich der Exponenten sollte $b - 1 = 1$ und $b + 1 = 3$ sein, also $b = 2$. Dann entspricht die Gleichung

$$\begin{aligned} 2ax + 2ax^3 - ax + a^2x^3 &= -x - x^3 \\ \Longleftrightarrow \qquad ax + (2a + a^2)x^3 &= -x - x^3, \end{aligned}$$

was durch $a = -1$ erfüllt ist. Eine partikuläre Lösung ist also $y = -x^2$. Die Substitution $y = z + y_p = z - x^2$ liefert die neue Differentialgleichung

$$z' - \frac{1}{x}z + \frac{1}{x}z^2 = 0.$$

Dies entspricht genau der Differentialgleichung aus Teil (b) und hat somit die allgemeine Lösung $z = 0$ oder $z = \frac{x}{c+x}$, was für y

$$y = -x^2 \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{x}{c+x} - x^2$$

entspricht.

(f) Dies ist eine Clairautsche Differentialgleichung mit $h(z) = \sqrt{z}$. Als allgemeine Lösung erhalten wir also einerseits

$$y = cx + h(c) = cx + \sqrt{c}$$

für jedes $c \geq 0$ und andererseits für den Fall $x + \frac{dh}{dz} = 0$ die Lösung, die durch

$$\begin{aligned} x &= -\frac{dh}{dz} = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \\ y &= -\frac{dh}{dz} \cdot z + h(z) = -\frac{z}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z} = \frac{1}{2}\sqrt{z} = -\frac{1}{4x} \end{aligned}$$

parametrisiert wird. Diese Lösung ist die Einhüllende der oben genannten Geraden. Es handelt sich dabei um einen Ast einer Hyperbel, wobei x alle negativen Werte durchläuft und $y = -\frac{1}{4x}$ also positiv ist. $\square$