Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
7. Juni 2013

***Aufgabe 1.** Gegeben seien

$$f(x,y) = (xy^2 - 8)e^{x+y} \qquad \text{und} \qquad P = (1,2).$$

Der Gradient von f ist genau an der Stelle P Null.

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix, ob es sich bei P um ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f auf dem Gebiet $G = \{(x,y) \mid |x| \leq 4, |y| \leq 1\}$.

Lösung: (a) Wir berechnen die partiellen Ableitungen von f.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y^2e^{x+y} + (xy^2-8)e^{x+y} = \big((x+1)y^2 - 8\big)e^{x+y} \\
f_y(x,y) &= 2xye^{x+y} + (xy^2-8)e^{x+y} = \big(xy^2 + 2xy - 8\big)e^{x+y} \\
f_{xx}(x,y) &= y^2e^{x+y} + \big((x+1)y^2 - 8\big)e^{x+y} \\
&= \big((x+2)y^2 - 8\big)e^{x+y} \\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= 2(x+1)ye^{x+y} + \big((x+1)y^2 - 8\big)e^{x+y} \\
&= \big((x+1)y^2 + 2(x+1)y - 8\big)e^{x+y} \\
f_{yy}(x,y) &= (2xy + 2x)e^{x+y} + \big(xy^2 + 2xy - 8\big)e^{x+y} \\
&= \big(xy^2 + 4xy + 2x - 8\big)e^{x+y}
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix an der Stelle P ist also

$$H(1,2) = \begin{pmatrix} 4e^3 & 8e^3 \\ 8e^3 & 6e^3 \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist $24e^6 - 64e^6 = -40e^6$. Da die Determinante negativ ist, handelt es sich bei P um einen Sattelpunkt.

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

(b) Der Punkt P liegt außerhalb von G und da der Gradient von f an keiner anderen Stelle Null ist, hat f keine Maxima oder Minima im Inneren von G. Wir müssen also nur den Rand betrachten.

Das Gebiet G ist ein Rechteck mit horizontaler Kantenlänge 8 und vertikaler Kantenlänge 2. Der Rand besteht also aus vier Kanten, die sich wie folgt parametrisieren lassen:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= (4, t) \text{ mit } t \in [-1, 1], & \vec{b}(t) &= (-4, t) \text{ mit } t \in [-1, 1], \\ \vec{c}(t) &= (t, 1) \text{ mit } t \in [-4, 4], & \vec{d}(t) &= (t, -1) \text{ mit } t \in [-4, 4] \end{aligned}$$

Auf diesen Kanten entspricht die Funktion somit

$$\begin{aligned} h_a(t) = f(\vec{a}(t)) &= (4t^2 - 8)e^{4+t}, & t &\in [-1, 1], \\ h_b(t) = f(\vec{b}(t)) &= (-4t^2 - 8)e^{-4+t}, & t &\in [-1, 1], \\ h_c(t) = f(\vec{c}(t)) &= (t - 8)e^{t+1}, & t &\in [-4, 4], \\ h_d(t) = f(\vec{d}(t)) &= (t - 8)e^{t-1}, & t &\in [-4, 4]. \end{aligned}$$

Die Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \dot{h}_a(t) &= 8te^{4+t} + (4t^2 - 8)e^{4+t} = (4t^2 + 8t - 8)e^{4+t}, \\ \dot{h}_b(t) &= -8te^{4+t} + (-4t^2 - 8)e^{4+t} = (-4t^2 - 8t - 8)e^{4+t}, \\ \dot{h}_c(t) &= e^{t+1} + (t - 8)e^{t+1} = (t - 7)e^{t+1}, \\ \dot{h}_d(t) &= e^{t-1} + (t - 8)e^{t-1} = (t - 7)e^{t-1}. \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von $\dot{h}_c$ und $\dot{h}_d$ ist jeweils $t = 7$, was aber außerhalb des Definitionsbereiches $[-4, 4]$ liegt. Also hat f kein Extremum im Inneren dieser beiden Kanten. Die Nullstelle von $\dot{h}_a$ erfüllt

$$\begin{aligned} & 4t^2 + 8t - 8 = 0 \\ \iff \quad & t^2 + 2t - 2 = 0 \\ \iff \quad & t = -1 \pm \sqrt{1 + 2} = -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Im Definitionsbereich $[-1, 1]$ liegt nur die Nullstelle $t = \sqrt{3} - 1$. Für die Nullstellen von h_b gilt

$$\begin{aligned} & -4t^2 - 8t - 8 = 0 \\ \iff \quad & t^2 + 2t + 2 = 0 \\ \iff \quad & t = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i, \end{aligned}$$

es gibt also keine Extremstellen im Inneren dieser Kante. Die einzigen Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand sind also die oben berechnete Stelle auf der Kante a und die Ecken des Rechteckes. Wir berechnen nun die Funktionswerte dieser Punkte.

$$\begin{aligned}
&f(-4,-1) = -12e^{-5}, && f(-4,1) = -12e^{-3},\\
&f(4,-1) = -4e^{3}, && f(4,1) = -4e^{5}\\
&\text{und} && f\left(4, \sqrt{3}-1\right) = (8-8\sqrt{3})e^{3+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Vergleichen wir die Funktionswerte miteinander (mit Hilfe eines Taschenrechners), sehen wir, dass der Funktionswert an der Stelle $\left(4, \sqrt{3}-1\right)$ kleiner ist als an den beiden „benachbarten" Stellen $(4,-1)$ und $(4,1)$ (siehe auch Abbildung 1), dort liegt also ein lokales Minimum auf dem Rand vor. Der Funktionswert bei $(-4,-1)$ ist größer als an den beiden benachbarten Stellen $(-4,1)$ und $(4,-1)$, also liegt dort ein Maximum auf dem Rand vor. Für alle anderen Stellen hat eine der beiden benachbarten Stellen einen größeren, die andere einen kleineren Funktionswert. Dort liegen also keine Extrema auf dem Rand vor.

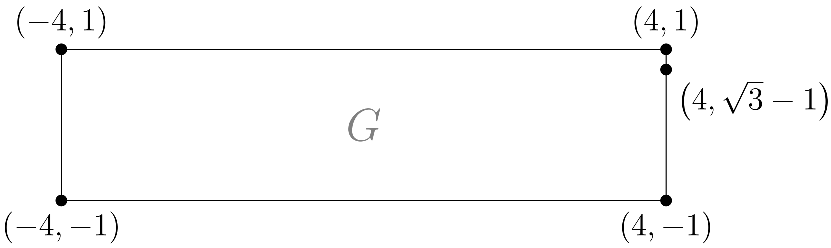

Abbildung 1: Die Kandidaten für Extrema auf dem Rand

Der einzige Kandidat für ein Maximum auf G ist also $(-4,-1)$, der einzige Kandidat für ein Minimum $(4, \sqrt{3}-1)$. Da G kompakt ist, hat f dort ein Maximum und ein Minimum, also sind die beiden Punkte tatsächlich Maximum und Minimum auf G.

Wäre G nicht kompakt, bräuchten wir andere Argumente. Dafür müssen wir den Gradienten von f an den beiden Stelle berechnen. Da die Richtungsableitung in $(4, \sqrt{3}-1)$ entlang a Null ist, verläuft der Gradient senkrecht zum Rand, zeigt also ins Innere von G oder nach außen. Siehe auch Abbildung 2.

Zeigt er ins Innere, sind die Richtungsableitungen in Richtung des Inneren positiv und der Punkt ist ein Minimum. Zeigt der Gradient aber

Abbildung 2: Die möglichen Gradienten am Punkt $\big(4, \sqrt{3}-1\big)$

nach außen, sind die Richtungsableitungen nach innen negativ und der Punkt ist kein Extremum.

Es ist

$$\operatorname{grad} f(4, \sqrt{3}-1) = \big((12-10\sqrt{3})e^{3+\sqrt{3}}, 0\big).$$

Weil die x-Komponente des Vektors negativ ist, zeigt der Gradient ins Innere des Gebiets und der Punkt ist ein lokales Minimum.

Zuletzt müssen wir noch den Punkt $(-4,-1)$ betrachten. Dort sind die Richtungsableitungen entlang der Kanten negativ, der Gradient hat also zu beiden Kanten einen Winkel größer als $90°$, denn die Ableitung in Richtung $\vec{r}$ ist $\nabla f \cdot \vec{r} = |\nabla f| \cdot |\vec{r}| \cos(\alpha)$, wobei α der Winkel zwischen den beiden Vektoren bezeichnet. Siehe auch Abbildung 3.

Abbildung 3: Der Gradient am Punkt $(-4,-1)$

Damit ist die Richtungsableitung in jede Richtung ins Innere von G negativ und daher ist $(-4,-1)$ ein lokales Maximum.

Insgesamt haben wir ein lokales Minimum bei $(4, \sqrt{3}-1)$ und ein lokales Maximum bei $(-4, 1)$. $\square$

Bemerkung: Wir fassen die Vorgehensweise für beliebiges f und G noch einmal zusammen:

- Bestimme alle Stellen $(x,y) \in G$ mit $\nabla f(x,y) = \vec{0}$.
- Für jede solche Stelle (x_0,y_0) berechnen wir $\Delta_1 = f_{xx}(x_0,y_0)$ sowie $\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$.

- – Wenn $\Delta_2 < 0$, dann ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.
  – Wenn $\Delta_2 > 0$ und $\Delta_1 < 0$, dann ist (x_0, y_0) ein lokales Maximum.
  – Wenn $\Delta_2 > 0$ und $\Delta_1 > 0$, dann ist (x_0, y_0) ein lokales Minimum.

- Parametrisiere den Rand von G (gegebenenfalls stückweise) und setze diese Parametrisierung in f ein.
- Bestimme die Extremstellen der erhaltenen Funktion(en) mit den üblichen Mitteln.
- Ein lokales Maximum/Minimum an einer „Ecke“ des Randes (Innenwinkel kleiner als 180°) ist auch ein lokales Maximum/Minimum auf G.
- Ein lokales Maximum auf dem Rand, das nicht auf einer Ecke liegt, ist ein lokales Maximum auf G, sofern der Gradient nach außen gerichtet ist, ansonsten ist es kein Extremum. Für ein lokales Minimum auf dem Rand muss der Gradient nach innen gerichtet sein.

Aufgabe 2. Gegeben seien

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - x \quad \text{und} \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f und g auf den Gebieten

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}, \\ G_2 &= \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 7\}, \\ G_3 &= \{(x, y) \mid x, y \geq 3\}, \\ G_4 &= \{(x, y) \mid x - y \geq 5\}. \end{aligned}$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir die lokalen Extrema auf $\mathbb{R}^2$. Dafür brauchen wir die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + y^2 - 1 \\ f_y(x, y) &= 2xy \\ f_{xx}(x, y) &= 6x \\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) &= 2y \\ f_{yy}(x, y) &= 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g_x(x, y) &= 2xe^{x^2+y^2} \\ g_y(x, y) &= 2ye^{x^2+y^2} \\ g_{xx}(x, y) &= (4x^2 + 2)e^{x^2+y^2} \\ g_{xy}(x, y) = g_{yx}(x, y) &= 4xye^{x^2+y^2} \\ g_{yy}(x, y) &= (4y^2 + 2)e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Der Gradient von f ist genau dann Null, wenn $x = 0$ und $y = \pm 1$ oder $y = 0$ und $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Der Gradient von g ist genau an der Stelle $(0, 0)$ Null.

Die Hesse-Matrizen an diesen Stellen sind

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

und

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Matrizen haben die negative Determinante -4, also sind $(0,1)$ und $(0,-1)$ Sattelpunkte von f. Alle anderen Determinanten sind 4, also positiv. Da f_{xx} im Punkt $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ negativ ist, ist der Punkt ein lokales Maximum von f. Im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ist f_{xx} positiv, also ist dort ein lokales Minimum von f. Ebenso hat g ein lokales Minimum in $(0,0)$.

Nun betrachten wir die einzelnen Gebiete: G_1 ist ein Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung und enthält also alle lokalen Extrema von f und g. Der Rand von G_1 lässt sich durch $\vec{v}_1(t) = \left(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)\right)$ parametrisieren. Die beiden Funktionen entsprechen darauf

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1(t)) &= 2\sqrt{2}\cos^3(t) + 2\sqrt{2}\cos(t)\sin^2(t) - \sqrt{2}\cos(t) \\ &= 2\sqrt{2}\cos(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t)) - \sqrt{2}\cos(t) = \sqrt{2}\cos(t), \\ g(\vec{v}_1(t)) &= e^{2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)} = e^2. \end{aligned}$$

Die Funktion f hat auf dem Rand des Kreises ein Maximum bei $t = 0$ und ein Minimum bei $t = \pi$ – das entspricht den Stellen $(\sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, 0)$. Die Funktion g ist auf dem Kreisrand konstant.

Um zu überprüfen, ob es sich um lokale Maxima beziehungsweise Minima auf G_1 handelt, müssen wir überprüfen, ob der Gradient nach außen oder innen weist. Die Gradienten sind

$$\nabla f(\sqrt{2}, 0) = (5, 0), \qquad \nabla f(-\sqrt{2}, 0) = (5, 0), \qquad \nabla g(x, y) = 2e^2(x, y).$$

Der Gradient von f weist an der Stelle $(\sqrt{2}, 0)$ nach außen und an der Stelle $(-\sqrt{2}, 0)$ nach innen, es handelt sich also bei $(\sqrt{2}, 0)$ tatsächlich um ein Maximum und bei $(-\sqrt{2}, 0)$ um ein Minimum. Der Gradient von g weist für jedes (x, y) auf dem Kreisrand nach außen, alle diese Punkte sind also lokale Maxima. Siehe auch Abbildung 4.

Insgesamt haben wir

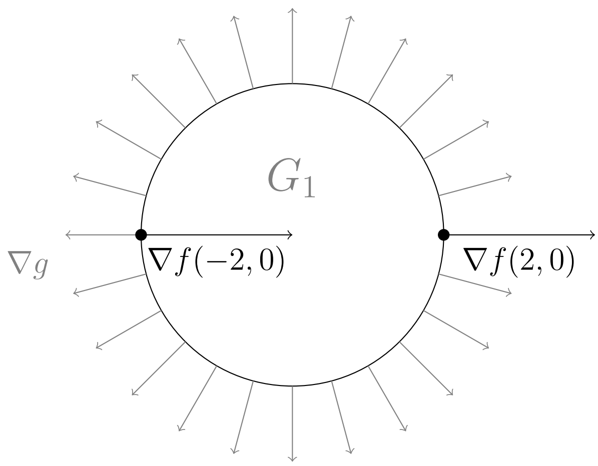

Abbildung 4: Die Gradienten auf dem Rand von G_1. (Die Längen sind nicht maßstabsgerecht.)

	Maxima	Minima
f	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (\sqrt{2}, 0)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (-\sqrt{2}, 0)$
g	gesamter Rand	$(0,0)$

G_2 enthält keines der oben berechneten lokalen Maxima und Minima von f und g. Wir betrachten also noch den Rand von G_2. Dieser besteht aus zwei vertikalen Geraden, eine bei $x = 1$ und eine bei $x = 7$. Man kann sie durch

$$\vec{v}_2(t) = (1, t) \qquad \text{und} \qquad \vec{w}_2(t) = (7, t)$$

parametrisieren. Die Funktionen entsprechen auf den Geraden

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_2(t)) &= 2 + t^2, & g(\vec{v}_2(t)) &= e^{1+t^2}, \\ f(\vec{w}_2(t)) &= 336 + 7t^2, & g(\vec{w}_2(t)) &= e^{49+t^2}. \end{aligned}$$

Die Extremstellen dieser Funktionen kann man durch Berechnen der Ableitungen bestimmen, in diesem Fall kann man sie aber direkt sehen: t^2 hat ein Minimum bei $t = 0$ und kein Maximum, dementsprechend haben auch alle vier Funktionen Minima bei $t = 0$ und kein Maximum.

Nun müssen wir wieder die Gradienten berechnen, um zu bestimmen, ob diese Punkte tatsächlich Minima auf G_2 sind und nicht nur auf dem Rand. Die Gradienten sind

$$\begin{aligned} \nabla f(1,0) &= (2,0), & \nabla g(1,0) &= (2e, 0), \\ \nabla f(7,0) &= (146,0), & \nabla g(7,0) &= (14e^{49}, 0). \end{aligned}$$

Für beide Funktionen weist der Gradient an der Stelle $(1,0)$ in Innere von G_2 und an der Stelle $(7,0)$ nach außen. Bei $(1,0)$ liegt in beiden Fällen also ein Minimum vor und bei $(7,0)$ kein Extremum. Insgesamt haben also beide Funktionen nur ein lokales Extremum, nämlich ein Minimum bei $(1,0)$. Siehe auch Abbildung 5.

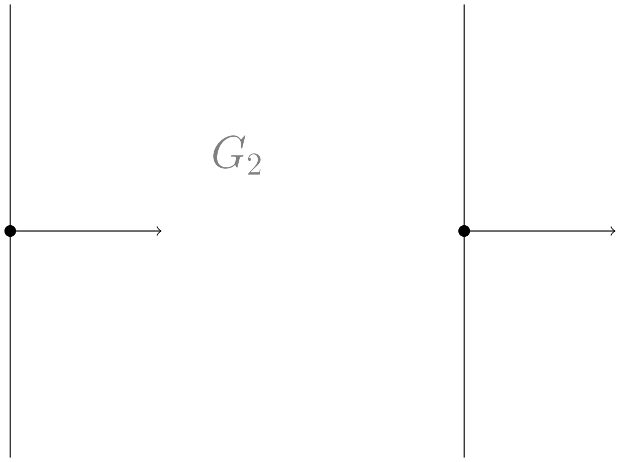

Abbildung 5: Die Gradienten auf dem Rand von G_2. (Die Längen sind nicht maßstabsgerecht.)

G_3 enthält ebenfalls keine der lokalen Extremstellen. Der Rand von G_3 besteht aus zwei Strahlen, die durch

$$\vec{v}_3(t) = (3+t, 3) \quad \text{und} \quad \vec{w}_3(t) = (3, 3+t), \qquad \text{jeweils mit } t \geq 0$$

parametrisiert werden können. Die Funktionen f und g entsprechen hierauf

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_3(t)) &= t^3 + 9t^2 + 36t + 51, \qquad & g(\vec{v}_3(t)) &= e^{t^2+6t+18}, \\ f(\vec{w}_3(t)) &= 3t^2 + 18t + 51, \qquad & g(\vec{w}_3(t)) &= e^{t^2+6t+18}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Extremstellen einzeln.

$$\frac{d}{dt} f(\vec{v}_3(t)) = 3t^2 + 18t + 36 = 3(t^2 + 6t + 12)$$

Die Nullstellen hiervon sind $t = -3 \pm \sqrt{9-12}$, also nicht reell. Auf dem horizontalen Strahl hat f also kein Extremum. Am Randpunkt $t = 0$ ist die Ableitung 36, dort liegt also ein lokales Minimum auf dem Strahl vor.

$$\frac{d}{dt} g(\vec{v}_3(t)) = (2t+6)e^{t^2+6t+18}$$

Die Nullstelle hiervon ist $t = -3$, was außerhalb des Definitionsbereiches liegt. Also hat auch g auf diesem Strahl kein Extremum. Gleiches gilt für den zweiten Strahl, da g auf den beiden Strahlen identisch ist. In beiden Fällen ist am Randpunkt $t = 0$ die Ableitung $6e^{18}$, also liegt dort jeweils ein lokales Minimum auf den beiden Strahlen.

$$\frac{d}{dt} f(\vec{w}_3(t)) = 6t + 18$$

Auch hier erhalten wir mit $t = -3$ einen Wert außerhalb des Definitionsbereiches. An der Stelle $t = 0$ ist die Ableitung 18, also ist hier ein Minimum von f auf dem Strahl

Die einzige mögliche Extremstelle ist für beide Funktionen also $(3, 3)$, die „Ecke" von G_3. Da dieser Punkt für beide Funktionen ein Minimum auf beiden Strahlen ist, ist dort ein Minimum auf dem Rand von G_3. Damit handelt es sich automatisch um ein lokales Minimum auf G_3 (siehe die Bemerkung nach Aufgabe 1).

Auch G_4 enthält die lokalen Extremstellen von f und g nicht. Der Rand ist die Gerade $x - y = 5$, also $y = x - 5$. Diese Gerade können wir durch $\vec{v}_4(t) = (t, t-5)$ parametrisieren. Die beiden Funktionen entsprechen auf der Geraden

$$f(\vec{v}_4(t)) = 2t^3 - 10t^2 + 24t \quad \text{und} \quad g(\vec{v}_4(t)) = e^{2t^2-10t+25}.$$

Die Extremstellen bestimmen wir mit Hilfe der Ableitungen.

$$\frac{d}{dt} f(\vec{v}_4(t)) = 6t^2 - 20t + 24 = 6\left(t^2 - \frac{10}{3}t + 4\right)$$

Die Nullstellen hiervon sind $t = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 4} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{-\frac{11}{9}}$, also nicht reell. f besitzt also keine Extremstellen auf dem Rand von G_4.

$$\frac{d}{dt} g(\vec{v}_4(t)) = (4t - 10)e^{2t^2-10t+25}$$

Die Nullstelle hiervon ist $t = \frac{5}{2}$. Die zweite Ableitung der Funktion ist

$$\frac{d^2}{dt^2} g(\vec{v}_4(t)) = (16t^2 - 80t + 104)e^{2t^2-10t+25}$$

und der Funktionswert an der Stelle $t = \frac{5}{2}$ ist $4e^{\frac{25}{2}}$. Also liegt ein Minimum vor.

Zuletzt berechnen wir noch den Gradienten an dieser Stelle. Bei $t = \frac{5}{2}$ wird der Punkt $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ durchlaufen. Der Gradient dort ist

$$\nabla g \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \left(5e^{\frac{25}{2}}, -5e^{\frac{25}{2}}\right).$$

Er weist also ins Innere von G_4, somit ist $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ tatsächlich ein lokales Minimum von g auf G_4. Andere Extremstellen hat g dort nicht, f besitzt auf G_4 überhaupt keine Extremstellen. Siehe auch Abbildung 6.

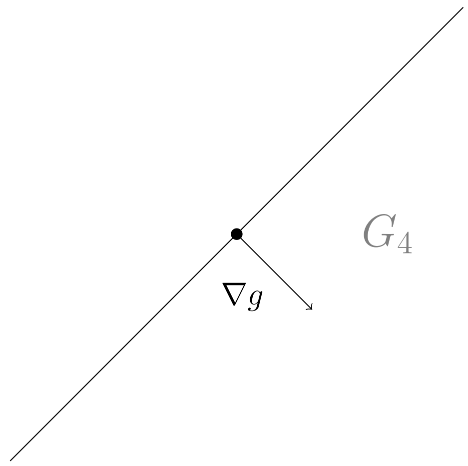

Abbildung 6: Der Gradient auf dem Rand von G_4

□