Vorlesungsprüfung Mathematik II, M

Lösungen

28.6.2013

1. Ermitteln Sie zu dem Kegelschnitt

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 4 = 0$$

den Typ der Lösungsmenge sowie Drehwinkel und Verschiebungsvektor.

Lösung: In Matrix-Schreibweise lautet die Gleichung $\vec{x}^t A\vec{x} + \vec{p}^t\vec{x} + f = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f = 4.$$

Die Determinante von A ist $2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 6 \neq 0$. Also berechnen wir gemäß der Vorgehensweise bei Kegelschnitten zunächst den Vektor

$$\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und den Wert

$$C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 = -1.$$

Als nächstes benötigen wir die Eigenwerte von A. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$. Die Eigenvektoren zu λ_1 erfüllen das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

ein normierter Eigenvektor ist also $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Eigenvektoren zu λ_2 erfüllen

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

ein normierter Eigenvektor ist also $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Als Matrix S erhalten wir somit

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel φ ist $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx \pm 0.4636 \approx \pm 26.565°$. Da der linke untere Eintrag von S negativ ist und $\sin(\varphi)$ entspricht, ist $\varphi \approx -0.4636 \approx -26.565°$. (Bei anderer Wahl der Eigenvektoren kann man auch einen Drehwinkel von $90° + \varphi \approx 63.435°$, $180° + \varphi \approx 153.435°$ oder $270° + \varphi \approx 243.435°$ erhalten.)

Da beide Eigenwerte positiv sind und C negativ, handelt es sich bei der Lösungsmenge um eine Ellipse mit Drehwinkel φ und Verschiebungsvektor $\vec{q}$. □

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 10y = 7xe^{-5x} + 100x.$$

Lösung: Dies ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + 3\lambda - 10$ und hat die Nullstellen 2 und -5. Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist also

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x}.$$

Für die partikuläre Lösung können wir einen speziellen Ansatz verwenden. Laut Tabelle ist dieser $y_P(x) = (ax+b)e^{-5x} + cx + d$, allerdings ist -5 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und wir müssen daher den entsprechenden Teil des Ansatzes mit x multiplizieren. Unser Ansatz lautet also $y_P(x) = (ax^2 + bx)e^{-5x} + cx + d$. Die Ableitungen hiervon sind

$$\begin{aligned} & y_P'(x) = (-5ax^2 + (2a - 5b)x + b)e^{-5x} + c \\ \text{und} \qquad & y_P''(x) = (25ax^2 + (25b - 20a)x + 2a - 10b)e^{-5x}. \end{aligned}$$

In die Differentialgleichung eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} 7xe^{-5x} + 100x &= (25ax^2 + (25b - 20a)x + 2a - 10b)e^{-5x} \\ &\quad + (-15ax^2 + (6a - 15b)x + 3b)e^{-5x} + 3c \\ &\quad - (10ax^2 + 10bx)e^{-5x} - 10cx - 10d \\ &= (-14ax + 2a - 7b)e^{-5x} - 10cx + 3c - 10d. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir

$$7 = -14a, \quad 0 = 2a - 7b, \quad 100 = -10c \quad \text{und} \quad 0 = 3c - 10d.$$

Wir haben also $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{7}$, $c = -10$ und $d = -3$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-5x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x\right) e^{-5x} - 10cx - 3.$$ □

3. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x(y^2-2)$ auf der Kreisscheibe $x^2+y^2 \leq 1$.

   Lösung: Zuerst schauen wir nach Extremstellen im Inneren. An solchen Stellen muss der Gradient von f Null sein. Dieser ist

   $$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2-2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

   Die erste Komponente ist genau dann Null, wenn $y = \pm\sqrt{2}$. Damit auch die zweite Komponente Null ist, muss $x = 0$ sein. Beide Stellen liegen nicht in der Kreisscheibe und müssen daher nicht weiter betrachtet werden.

   Es verbleiben die Punkte auf dem Rand. Lösen wir die Randbedingung $x^2+y^2 = 1$ nach y^2 auf und setzen in f ein, erhalten wir die Funktion $h(x) = x(-1-x^2) = -x-x^3$. Diese hat die Ableitung $h'(x) = -1-3x^2$, was niemals Null ist. Die einzigen Extremstellen von h liegen also am Rand des erlaubten Intervalls für x, also bei $x = \pm 1$. Daraus folgt $y = 0$.

   Die einzigen Kandidaten für Extremstellen sind also $(1,0)$ und $(-1,0)$. Die Funktionswerte sind

   $$f(1,0) = -2 \qquad \text{und} \qquad f(-1,0) = 2.$$

   Da die Kreisscheibe kompakt ist, werden Maximum und Minimum angenommen und somit liegt bei $(1,0)$ ein globales (und daher auch lokales) Minimum und bei $(-1,0)$ ein Maximum.

   Alternativ kann man für die Extremstellen auf dem Rand auch Lagrange-Multiplikatoren verwenden. □

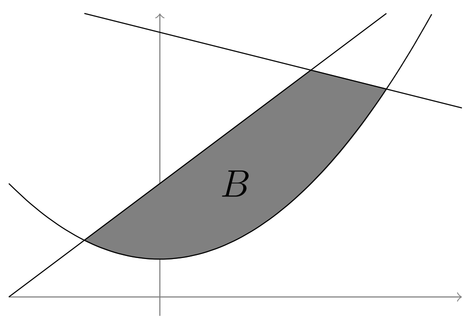
4. Berechnen Sie den Wert des Integrals

   $$\iint_B 3x\,dx\,dy,$$

   wobei der Bereich B wie folgt gegeben ist:

   $$B = \{(x,y) \mid y \geq x^2+2 \ \wedge\ y \leq 3x+6 \ \wedge\ x+y \leq 14\}.$$

   Lösung: Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, skizzieren wir zuerst den Bereich B. Er sieht wie folgt aus:



Die Schnittpunkte der Kurven sind $(-1,3)$, $(3,11)$ und $(2,12)$. Also läuft x von -1 bis 3. Dabei ist y von unten durch x^2+2 beschränkt und von oben im Abschnitt $x \in [-1,2]$ zunächst durch $3x+6$ und im Abschnitt $x \in [2,3]$ durch $14-x$. Das Integral lautet also

$$\begin{aligned}
\iint_B 3x dx dy &= \int_{-1}^{2} \int_{x^2+2}^{3x+6} 3x dy dx + \int_{2}^{3} \int_{x^2+2}^{14-x} 3x dy dx \\
&= \int_{-1}^{2} \Big[3xy \Big]_{x^2+2}^{3x+6} dx + \int_{2}^{3} \Big[3xy \Big]_{x^2+2}^{14-x} dx \\
&= \int_{-1}^{2} -3x^3 + 9x^2 + 12x dx + \int_{2}^{3} -3x^3 - 3x^2 + 36x dx \\
&= \left[-\frac{3}{4}x^4 + 3x^3 + 6x^2 \right]_{-1}^{2} + \left[-\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 18x^2 \right]_{2}^{3} \\
&= 56.
\end{aligned}$$

□