Multivariate Verteilungen

Zufallsvektoren und Modellierung der Abhängigkeiten

Ziel: Modellierung der Veränderungen der Risikofaktoren
$X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,d})$

Annahme: $X_{n,i}$ und $X_{n,j}$ sind abhängig aber $X_{n,i}$ und $X_{n\pm k,j}$ sind unabhängig für $k \in \mathbb{N}$ $(k \neq 0)$, $1 \leq i, j \leq d$.

Grundlegende Eigenschaften von Zufallsvektoren

Ein d-dimensionaler Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ wird durch die Verteilungsfunktion F spezifiziert

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_d \leq x_d) = P(X \leq x).$$

Die i. Randverteilung F_i von F ist die Verteilungsfunktion von X_i und ist folgendermaßen gegeben:

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty)$$

Die Verteilungsfunktion F ist stetig wenn es eine nicht negative Funktion $f \geq 0$ gibt, sodass

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, u_2, \ldots, u_d) du_1 du_2 \ldots du_d$$

f ist in diesem Fall die Dichte von F.

Die Komponenten von X sind unabhängig dann und nur dann wenn

$$F(x) = \Pi_{i=1}^{d} F_i(x_i)$$

oder, wenn die Dichten f und f_i, $1 \leq i \leq d$, existieren, dann sind die Komp. von X d.u.n.d. unabhängig wenn

$$f(x) = \Pi_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

Ein Zufallsvektor wird durch seine charakteristische Funktion $\phi_X(t)$ eindeutig spezifiziert:

$$\phi_X(t) := E(\exp\{it^T X\}), t \in \mathbb{R}^d$$

Wenn $E(X_k^2) < \infty$ für alle k, dann ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors folgendermaßen gegeben:

$$Cov(X) = E((X - E(X))(X - E(X))^T)$$

Anmerkung:

Für einen n-dimensionalen Zufallsvektor X, eine konstante Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen konstanten Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gelten folgende Gleichungen:

$$E(BX + b) = BE(X) + b \qquad Cov(BX + b) = BCov(X)B^T$$

Beispiel 1 *Für die multivariate Normalverteilung mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix Σ sind die Dichtefunktion f bzw. die charakteristische Funktion ϕ_X folgendermaßen gegeben ($|\Sigma| = |Det(\Sigma)|$):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_X(t) = \exp\left\{it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Sigma t\right\}, t \in \mathbb{R}^d$$

Probleme bei Modellierung der Abhängigkeit zwischen Finanzgrössen mit Hilfe der (multivariaten) Normalverteilung

- Finanzgrößen haben i.a. heavier Tails als die Normalverteilung
- Die Zusammenhänge bei größeren Verlusten sind i.a. stärker als bei “normalen” Werten. Diese Art von Zusammenhängen kann mit der multivariaten Normalverteilung nicht modelliert werden.

(Veranschaulichung der Problematik durch einen Vergleich zwischen Streudiagrammen von echten Daten und Scatter-Plots von Daten, die aus einer Normalverteilung mit geschätztem Erwartungsvektor und geschätzter Kovarianzmatrix simuliert werden.)

Abhängigkeitsmaße
Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen. Es gibt einige skalare Maße für die Abhängigkeit zwischen X_1 und X_2.

Lineare Korrelation
Annahme: $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$. Der Koeffizient der linearen Korrelation $\rho_L(X_1, X_2)$ ist folgendermaßen gegeben:

$$\rho_L(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{var(X_1) var(X_2)}}$$

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängig } \Rightarrow \rho_L(X_1, X_2) = 0$$

$$\rho_L(X_1, X_2) = 0 \text{ impliziert nicht, dass } X_1 \text{ und } X_2 \text{ unabhängig sind}$$

Beispiel 2 *Sei $X_1 \sim N(0,1)$ und $X_2 = X_1^2$. Es gilt $\rho_L(X_1, X_2) = 0$ aber X_1 und X_2 sind klarerweise abhängig.*

Weiters gilt:

$$|\rho_L(X_1, X_2)| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0, \text{ sodass } X_2 \stackrel{d}{=} \alpha + \beta X_1$$
$$\text{und } \mathrm{signum}(\beta) = \mathrm{signum}(\rho_L(X_1, X_2))$$

Der lineare Korrelationskoeff. ist eine Invariante unter streng monoton steigende lineare Transformationen. D.h. für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 und reellen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 > 0$ gilt:

$$\rho_L(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho_L(X_1, X_2).$$

Der lineare Korrelationskoeffizient ist jedoch keine Invariante unter streng monoton steigende nicht-lineare Transformationen.

Beispiel 3 *Seien $X \sim Exp(\lambda)$, $X_2 = X_1$, und T_1, T_2 zwei streng monoton steigende Transformationen: $T_1(X_1) = X_1$ und $T_2(X_1)) = X_1^2$. Dann gilt:*

$$\rho_L(X_1, X_1) = 1 \textit{ und } \rho_L(T_1(X_1), T_2(X_1)) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Rang Korrelation
Die Koeffizienten der Rang Korrelation (Spearmans Rho und Kendalls Tau) sind Maße für die Übereinstimmung von bivariaten Zufallsvektoren.

Seien (x_1, x_2) und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Die zwei Punkte heißen *übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ und *nicht übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$.

Seien $(X_1, X_2)^T$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)^T$ zwei unabhängige Zufallsvektoren mit identischer bivariater Verteilung.

Die Kendall's Tau ρ_τ ist definiert als

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right)$$

Sei $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ ein dritter von (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ unahängiger Zufallsvektor mit derselben Verteilung wie (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Die Spearman's Rho ρ_S ist definiert als

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3\left\{P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) < 0\right)\right\}$$

Einige Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S:

- $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ und $\rho_S(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.

- Wenn X_1 und X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- Sei $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion. Dann gilt:

$$\rho_\tau(T(X_1), T(X_2)) = \rho_\tau(X_1, X_2)$$

$$\rho_S(T(X_1), T(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2)$$

Beweis: 1) und 2) sind trivial. Beweis von 3) erfolgt mit Hilfe von Copulas, später...

Tail-Abhängigkeit

Definition 1 *Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2. Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ ($\lambda_L > 0$) heißt es, $(X_1, X_2)^T$ hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.

(Siehe Joe 1997, Schmidt und Stadtmüller 2002)

Übung 1 *Sei $X_1 \sim Exp(\lambda)$ und $X_2 = X_1^2$. Bestimmen Sie $\lambda_U(X_1, X_2)$, $\lambda_L(X_1, X_2)$ und zeigen Sie, dass $(X_1, X_2)^T$ eine obere und eine untere Tail-Abhängigkeit hat. Berechnen Sie auch den linearen Korrelationskoeffizienten $\rho_L(X_1, X_2)$.*

Multivariate elliptische Verteilungen

a) Die multivariate Normalverteilung

Definition 2 *Der Zufallsvektor* $(X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ *hat eine multivariate Normalverteilung (oder eine multivariate Gauss'sche Verteilung) wenn* $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$, *wobei* $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)^T$ *ein Vektor von i.i.d. normalverteilten ZV* ($Z_i \sim N(0,1)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$), $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ *ist eine konstante Matrix und* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *ist ein konstanter Vektor.*

Für so einen Zufallsvektor X gilt: $E(X) = \mu$, $cov(X) = \Sigma = AA^T$ (Σ positiv semidefinit). Notation: $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

Theorem 1 *(Multivariate Normalverteilung: äquiv. Definitionen)*

1. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ *für einen Vektor* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *und eine positiv semidefinite Matrix* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, *dann und nur dann wenn* $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d)^T$, *die Zufallsvariable* $a^T X$ *normal verteilt ist.*

2. *Ein Zufallsvektor* $X \in \mathbb{R}^d$ *ist multivariat normal verteilt dann und nur dann wenn seine charakteristische Funktion folgendermaßen gegeben ist:*

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = \exp\{it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t\}$$

für einen Vektor $\mu \in \mathbb{R}^d$ *und eine positiv semidefinite Matrix* $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

3. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit $E(X) = \mu$ und $cov(X) = \Sigma$, wobei die Determinante von Σ positiv ist ($det(\Sigma) := |\Sigma| > 0$), ist normal verteilt, d.h. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, dann und nur dann wenn seine Dichtefunktion folgendermaßen gegeben ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2}\right\}.$$

Beweis: (siehe zB. Gut 1995)

Theorem 2 *(Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung)*
Für $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ gilt:

Lineare Transformation:
Für $B \in \mathbb{R}^{k\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Es gilt dann $BX + b \in N_k(B\mu + b, B\Sigma B^T)$.

Randverteilungen:
Setze $X^T = \left({X^{(1)}}^T, {X^{(2)}}^T\right)$ für ${X^{(1)}}^T = (X_1, X_2, \ldots, X_k)^T$ und ${X^{(2)}}^T = (X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_d)^T$ und analog

$$\mu^T = \left({\mu^{(1)}}^T, {\mu^{(2)}}^T\right) \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann $X^{(1)} \sim N_k\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}\right)$ und $X^{(2)} \sim N_{d-k}\left(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}\right)$.

Bedingte Verteilungen:

Wenn Σ regulär, dann ist auch der bedingte Vektor $X^{(2)} \Big| X^{(1)} = x^{(1)}$ multivariat normal verteilt

$$X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{d-k}\Big(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}\Big) \text{ wobei}$$

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Big(x^{(1)} - \mu^{(1)}\Big) \text{ und}$$

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Quadratische Formen:

Wenn Σ regulär, dann gilt $D^2 = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim \chi_d^2$. Die Zufallsvariable D heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ und $Y \sim N_d(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim N_d(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$.

b) Varianzgemischte Normalverteilungen

Definition 3 *Ein Zufallsvektor* $X \in \mathbb{R}^d$ *hat eine multivariate varianzgemischte Normalverteilung wenn* $X \stackrel{d}{=} \mu + WAZ$ *wobei:* $Z \sim N_k(0, I)$, $W \geq 0$ *ist eine von* Z *unabhängige positive Zufallsvariable,* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *ist ein konstanter Vektor,* $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ *ist eine konstante Matrix, und* I *ist die Einheitsmatrix.*

Unter der Bedingung $W = w$ ist X normalverteilt: $X \sim N_d(\mu, w^2\Sigma)$, wobei $\Sigma = AA^T$.

$E(X) = \mu$ und $cov(X) = E(W^2 AZZ^T A^T) = E(W^2)\Sigma$ falls $E(W^2) < \infty$

Beispiel 4 Die multivariate t_α-Verteilung
Sei $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ *(Inverse Gamma-Verteilung) mit Dichtefunktion:*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \;\; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Dann gilt:

$$E(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \text{ für } \alpha > 1, \;\; var(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \text{ für } \alpha > 2$$

Sei $W^2 \sim IG(\alpha/2, \alpha/2)$. *Dann ist die Verteilung von* $X = \mu + WAZ$ *eine multivariate* t_α *Verteilung mit* α *Freiheitsgraden:* $X \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$.

$$cov(X) = E(W^2)\Sigma = \frac{\alpha}{\alpha - 2}\Sigma$$

c) Sphärische Verteilungen

Definition 4 *Ein Zufallsvektor* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ *hat eine sphärische Verteilung wenn für jede orthogonale Matrix* $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ *die Gleichung* $UX \stackrel{d}{=} X$ *gilt.*

Theorem 3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

1. *Der Zufallsvektor* $X \in \mathbb{R}^d$ *hat eine sphärische Verteilung.*

2. *Es existiert eine Funktion* $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, sodass die charakteristische Funktion von* X *folgendermaßen gegeben wird:*

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_d^2)$$

3. *Für jeden Vektor* $a \in \mathbb{R}^d$ *gilt* $a^t X \stackrel{d}{=} ||a|| X_1$ *wobei* $||a||^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_d^2$.

4. X *lässt sich als* $X \stackrel{d}{=} RS$ *repräsentieren, wobei der Zufallsvektor* $S \in \mathbb{R}^d$ *gleichmäßig verteilt auf der Einheitskugel* S^{d-1}, $\mathcal{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon ||x|| = 1\}$*, ist, und* $R \geq 0$ *eine von* S *unabhängige ZV ist.*

Notation einer sphärischen Verteilung: $X \sim S_d(\psi)$

Beispiel 5 *Die standard Normalverteilung ist eine sphärische Verteilungen.*

Sei $X \sim N_d(0, I)$. *Dann* $X \sim S_d(\psi)$ *mit* $\psi = \exp(-x/2)$.

Tatsächlich: $\phi_X(t) = \exp\{it^T 0 - \frac{1}{2} t^T I t\} = \exp\{-t^T t/2\} = \psi(t^T t)$.

Sei $X = RS$ *die stochastische Darstellung von* $X \sim N_d(0, I)$. *Es gilt* $||X||^2 \stackrel{d}{=} R^2 \sim \chi_d^2$;

Simulation einer sphärischen Verteilung:

(i) Simuliere s aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in $\mathcal{S}^{d-1}$ (zB. in dem y aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/||y||$ gesetzt wird).

(ii) Simuliere r aus R.

(iii) Setze $x = rs$.

d) Elliptische Verteilungen

Definition 5 *Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine elliptische Verteilung wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$, wobei $Y \sim S_k(\psi)$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor und $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix.*

Die charakteristische Funktion:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = E(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T \mu\} E(\exp\{i(A^T t)^T Y\})$$

$$= \exp\{it^T \mu\} \psi(t^T \Sigma t),$$

wobei $\Sigma = AA^T$.

Notation elliptische Verteilungen: $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$
μ heißt Positionsparameter (*location parameter*),
Σ heißt Dispersionsparameter (*dispersion parameter*),
ψ heißt charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung.

Falls $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär, dann gilt folgende Relation zwischen elliptischen und sphärischen Verteilungen:

$$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow A^{-1}(X - \mu) \sim S_d(\psi), \; A \in \mathbb{R}^{d \times d}, AA^T = \Sigma$$

Theorem 4 *(Stochastische Darstellung der elliptischen Verteilung)*

Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein d-dimensinaler Zufallsvektor.
$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ dann und nur dann wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$, wobei $S \in \mathbb{R}^k$ ist ein auf der Einheitskugel $\mathcal{S}^{k-1}$ gleichverteilter Zufallsvektor, $R \geq 0$ ist eine von S unahängige nicht negative Zufallsvariable, $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$ ist eine konstante Matrix ($\Sigma = AA^T$) und $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor.

Simulation einer elliptischen Verteilung:

(i) Simuliere s aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in $\mathcal{S}^{d-1}$ (zB. in dem y aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/||y||$ gesetzt wird).

(ii) Simuliere r aus R.

(iii) Setze $x = \mu + rAs$.

Beispiele elliptischer Verteilungen

Beispiel 6 *(Multivariate Normalverteilung)*

Sei $X \sim N(\mu, \Sigma)$. *Es existiert eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, *sodass* $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$ *wobei* $Z \in N_k(0, I)$ *und* $AA^T = \Sigma$. *Weiters gilt* $Z = RS$ *wobei* S *ein gleichmäßig verteilter Zufallsvektor in* $\mathcal{S}^{k-1}$ *ist und* $R^2 \sim \chi^2_k$. *Daraus folgt* $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$ *und daher* $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ *mit* $\psi(x) = \exp\{-x/2\}$.

Beispiel 7 *(Multivariate varianzgemischte Normalverteilung)*

Sei $Z \sim N_d(0, I)$ *ein normalverteilter Zufallsvektor.* Z *ist sphärisch-verteilt mit stochastischer Darstellung* $Z \stackrel{d}{=} VS$ *wobei* $V^2 = ||Z||^2 \sim \chi^2_d$. *Sei* $X = \mu + WAZ$ *eine varianzgemischte Normalverteilung. Dann gilt* $X \stackrel{d}{=} \mu + VWAS$ *wobei* $V^2 \sim \chi^2_d$ *und* VW *eine nicht-negative von* S *unabhängige ZV ist. D.h.,* X *ist elliptisch verteilt mit* $R = VW$.

Theorem 5 *(Eigenschaften der elliptischen Verteilung)*

Sei $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$. X hat folgende Eigenschaften:

Lineare Transformation:

Für $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$BX + b \in E_k(B\mu + b, B\Sigma B^T, \psi).$$

Randverteilungen:

Setze $X^T = \left(X^{(1)^T}, X^{(2)^T}\right)$ für
$X^{(1)^T} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ und $X^{(2)^T} = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_k)^T$ und analog
$\mu^T = \left(\mu^{(1)^T}, \mu^{(2)^T}\right)$ sowie $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}$. Es gilt dann
$X_1 \sim N_n\left(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}, \psi\right)$ und $X_2 \sim N_{k-n}\left(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}, \psi\right)$.

Bedingte Verteilungen:

Wenn Σ regulär, dann ist auch die bedingte Verteilung $X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)}$ elliptisch verteilt:

$$X^{(2)}\Big|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{k-n}\Big(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}, \tilde{\psi}\Big)$$

wobei

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Big(x^{(1)} - \mu^{(1)}\Big)$$

und

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\Big(\Sigma^{(1,1)}\Big)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Typischerwise sind $\tilde{\psi}$ und ψ unterschiedlich
(siehe Fang, Katz und Ng 1987).

Quadratische Formen:

Wenn Σ regulär, dann gilt

$$D^2 = (X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim R^2.$$

wobei R die nicht-negative ZV aus der stochastischen Darstellung $Y = RS$ der sphärischen Verteilung Y mit $S \sim U\left(\mathcal{S}^{(d-1)}\right)$ und $X = \mu + AY$ ist. Die Zufallsvariable D heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$ und $Y \sim E_k(\tilde{\mu}, \Sigma, \tilde{\psi})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim E_k(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma, \bar{\psi})$ wobei $\bar{\psi} = \psi\tilde{\psi}$.

Achtung: Σ muss i.a. dieselbe für X und Y sein.

Anmerkung: Aus $X \sim E_k(\mu, I_k, \psi)$ folgt nicht, dass die Komponenten von X unabhängig sind. Die Komponenten von X sind dann und nur dann unabhängig, wenn X multivariat normalverteilt mit der Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix ist.

Koherente Risikomaße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignismenge Ω, Ereignisalgebra $\mathcal{F}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Sei $L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller Zufallsgrößen aus $(\Omega, \mathcal{F})$, die fast sicher endlich sind.

Sei $M \subseteq L^{(0)}$.

Sei $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ ein Risikomaß in M

Definition 6 *Ein Risikomaß ρ, das folgende Eigenschaften besitzt, heißt koherent auf M:*

(C1) Invarianz bzgl. Translation:

$\rho(X + r) = \rho(X) + r$, *für jede Konstante r und jedes $X \in M$.*

(C2) Subadditivität:

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

(C3) Positive Homogenität:

$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in M$.

(C4) Monotonie:

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $X_1 \overset{f.s.}{\leq} X_2 \Longrightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

Konvexe Risikomaße

Betrachte die Eigenschaft

(C5) Konvexität:

$\forall X_1, X_2 \in M$, $\forall \lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

(C5) ist schwächer als (C2) und (C3), d.h. (C2) und (C3) zusammen implizieren (C5) aber nicht umgekehrt.

Definition 7 *Ein Risikomaß ρ, das die Eigenschaften (C1),(C4) und (C5) besitzt, heißt konvex auf M.*

Beobachtung: VaR ist i.A. nicht koherent

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch einer beliebigen kontinuierlichen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung F definiert.

$VaR_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ besitzt die Eigenschaften (C1), (C3) und (C4), jedoch i.A. nicht die Subadditivität

Beispiel 8 *Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die Binomialverteilung $B(p,n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, definiert.*

Wir zeigen: $VaR_\alpha(B(p,n))$ ist nicht subadditiv.

ZB.: Berechnen Sie den VaR der Verluste eines Bond-Portfolios bestehend aus 100 Bonds, die unabhängig von einander mit Wahrscheinlichkeit p defaultieren. Beobachten Sie, dass dieser Wert größer als das Hunderfache des VaRs des Verlustes eines einzigen Bonds ist.

Theorem 6 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $M \subseteq L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definierten Zufallsvariablen mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung F. $CVaR_\alpha$ ist eine koherentes Risikomaß in M, $\forall \alpha \in (0,1)$.*