## Das multivariate KMV Modell: Berechnung von multivariaten Default Wahrscheinlichkeiten

Seien $(Wj(t)\colon 0 \leq t \leq T,)$ unabhängige Standard Brown'sche Bewegungen, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Grundlegendes Modell:

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t) \exp\left\{\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma^2_{A,i}}{2}\right)(T-t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}\Big(W_j(T) - W_j(t)\Big)\right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift und $\sigma^2_{A,i} = \sum_{j=1}^{m} \sigma^2_{A,i,j}$ ist die Volatilität.

$\sigma_{A,i,j}$ quantifiziert den Einfluss der Brown'schen Bewegung $j$ auf die Entwicklung des Aktienwertes der Firma $i$.

Sei $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}(W_j(T)-W_j(t))}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$.

$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \sim N(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sigma_{A,i,k}\sigma_{A,j,k}}{\sigma_{A,i}\sigma_{A,j}}$

Dann gilt $V_{A,i}(T) < K_i \Longleftrightarrow Y_i < -DD_i$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + \left(\frac{-\sigma^2_{A,i}}{2} + \mu_{A,i}\right)(T-t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die ersten $k$ Firmen zahlungsunfähig werden:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1) = P(Y_1 < -DD_1, \ldots, Y_k < -DD_k)$$
$$= C_\Sigma^{Ga}(\phi(-DD_1), \ldots, \phi(-DD_k), 1, \ldots, 1)$$

$C_\Sigma^{Ga}$ ist die Copula einer multivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix $\Sigma$.

Häufigkeit der multivariaten Zahlungsunfähigkeit (joint default frequency):

$$JDF_{1,2,\ldots,k} = C_\Sigma^{Ga}(EDF_1, EDF_2, \ldots, EDF_k, 1, \ldots, 1)$$

wobei $EDF_i$ die Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit für die Firma $i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ist.

## Schätzung der Kovarianzen/Korrelationen $\sigma_{A,i,j}$

Schwierigkeiten:

- $n$ ist typischerweise sehr groß
- wenige historische Daten vorhanden,
- wenn $n$ groß, dann bilden die paarweise geschätzten Korrelationskoeffizienten i.A. keine positiv definite Korrelationsmatrix.

Mögliche Lösung:

Faktormodell für die latenten Variablen in dem der Aktienwert durch eine Reihe von gemeinsamen Faktoren (makro-ökonomische, globale, regionale, sektor-, länder- und branchenspezifische Faktoren) und einem firmenspezifischen Faktor bestimmt wird:

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T = AZ + BU \text{ wobei}$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_k)^T \sim N_k(0, \Lambda)$ sind $k$ gemeinsame Faktoren

$U = (U_1, \ldots, U_n)^T \sim N_d(0, I)$ sind die Firmenspezifischen Faktoren

$Z$ und $U$ sind unabhängig und

die Konstanten Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B = diag(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Modellparameter.

Es gilt dann $cov(Y) = A\Lambda A^T + D$ wobei $D = diag(b_1^2, \ldots, b_n^2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

## Migration basierte Modelle: Credit Metrics

Wurde einst bei J.P.Morgan entwickelt, aktuell bei MSCI (`https://www.msci.com/`)

Wird in erster Linie für die Evaluierung von Bond Portfolios verwendet. (Siehe Crouhy et al. (2000))

Basiert auf ein Bonität-Einstufungssystem
(zB. von *Moody* oder von *Standard and Poor's*).

Berücksichtigt die Veränderungen im PF-Wert aufgrund von Veränderungen in den Bonität-Einstufungen.

Sei $P$ ein Portfolio von $n$ Krediten mit einer fixen Laufzeit (zB. 1 Jahr). Sei $S_i$ der Zustand-Indikator von Kreditnehmer $i$.

Die möglichen Zustände werden mit $0, 1, \ldots, m$ bezeichnet, wobei $S_i = 0$ der Zahlungsunfähigkeit entspricht.

**Beispiel 1** *Einstufungssystem von Standard and Poor's*

$m = 7$; *$S_i = 0$ heißt Zahlungsunfähigkeit; $S_i = 1$ oder $CCC$; $S_i = 2$ oder $B$; $S_i = 3$ oder $BB$; $S_i = 4$ oder $BBB$; $S_i = 5$ oder $A$; $S_i = 6$ oder $AA$; $S_i = 7$ oder $AAA$.*

Für jeden Kreditnehmer wird die Dynamik der Bonität-Einstufungen mit Hilfe einer Markov Kette mit Zustandsmenge $\{0, 1, \ldots, m\}$ und Übergangsmatrix $P$ modelliert.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von historischen Daten geschätzt, zB.:

| Ursprüngliche | Einstufung am Ende des Jahres | | | | | | | Zahlungs- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Einstufung | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | unfähigkeit |
| AAA | 90.81 | 8.33 | 0.68 | 0.06 | 0.12 | 0 | 0 | 0 |
| AA | 0.70 | 90.65 | 7.79 | 0.64 | 0.06 | 0.14 | 0.02 | 0 |
| A | 0.09 | 2.27 | 91.05 | 5.52 | 0.74 | 0.26 | 0.01 | 0.06 |
| BBB | 0.02 | 0.33 | 5.95 | 86.93 | 5.30 | 1.17 | 0.12 | 0.18 |
| BB | 0.03 | 0.14 | 0.67 | 7.73 | 80.53 | 8.84 | 1.00 | 1.06 |
| B | 0 | 0.11 | 0.24 | 0.43 | 6.48 | 83.46 | 4.07 | 5.20 |
| CCC | 0.22 | 0 | 0.22 | 1.30 | 2.38 | 11.24 | 64.86 | 19.79 |

**Recovery Rates**

Im Fall einer Zahlungsunfähigkeit hängt die recovery rate von der Einstufung des Kreditnehmers ab. Der Durchschnittswert und die Standardabweichung der recovery rate werden aufgrund von historischen Daten innerhalb jeder Einstufungsklasse geschätzt.

## Evaluierung der Bonds im Falle einer Neu-Einstufung

**Beispiel 2** *Betrachten wir ein BBB Bond mit Laufzeit* 5 *Jahre.*

*Er zahlt jedes Jahr ein Kupon von 6%.*

*Die forward Zinsstrukturkurven (forward yield curves) für jede Einstufungsklasse sind wie folgt gegeben (in %):*

| Einstufung | 1. Jahr | 2. Jahr | 3. Jahr | 4. Jahr |
|---|---|---|---|---|
| AAA | 3.60 | 4.17 | 4.73 | 5.12 |
| AA | 3.65 | 4.22 | 4.78 | 5.17 |
| A | 3.73 | 4.32 | 4.93 | 5.32 |
| BBB | 4.10 | 4.67 | 5.25 | 5.63 |
| BB | 6.05 | 7.02 | 8.03 | 8.52 |
| CCC | 15.05 | 15.02 | 14.03 | 13.52 |

*Für ein Nennwert von* 100 *zahlt der Bond* 6 *Währungseinheiten am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres. Am Ende des 5. Jahres zahlt der Bond* 106 *Währungseinheiten.*

*Annahme: Am Ende des ersten Jahres wird der Bond neu als $A$ Bond eingestuft. Wert des Bonds am Ende des ersten Jahres:*
$V = 6 + \frac{6}{1+3{,}73\%} + \frac{6}{(1+4{,}32\%)^2} + \frac{6}{(1+4{,}93\%)^3} + \frac{106}{(1+5{,}32\%)^4} = 108.64$

Analog wird der Wert des Bonds am Ende des 1. Jahres ermittelt, falls er zu diesem Zeitpunkt zu anderen Klassen eingestuft wird.

Es wird eine recovery rate von 51.13% im Falle von Zahlungsunfähigekt angenommen.

| Einstufung am Ende des 1. Jahres | Wert |
|---|---|
| AAA | 109.35 |
| AA | 109.17 |
| A | 108.64 |
| BBB | 107.53 |
| BB | 102.01 |
| B | 98.09 |
| CCC | 83.63 |
| Zahlungsunfähigkeit | 51.13 |

## Wert und Risiko eines Bond-Portfolios in `Credit Metrics`

Die Abhängigkeit der Neueinstufungen unterschiedlicher Bonds und die Wahrscheinlichkeiten von Neueinstufungen von Gruppen von Bonds werden mit Hilfe der dazugehörigen Rendite berechnet.

Die Rendite von Bond $i$ wird als Normalverteilung $Y_i$ modelliert.

Seien $d_{Def}$, $d_{CCC}$, ..., $d_{AAA} = +\infty$ Schwellwerte, sodass für ein Kreditnehmer die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einer neuen Stufe $S_i$ am Ende einer vordefinierten Periode folgendermaßen gegeben sind: $P(S_i = 0) = \phi(d_{Def})$, $P(S_i = CCC) = \phi(d_{CCC}) - \phi(d_{Def})$, ..., $P(S_i = AAA) = 1 - \phi(AA)$.

Die Rendite mehrerer Bonds werden mit Hilfe der multivariaten Normalverteilung modelliert.

Die Korrelationsmatrix dieser Verteilung wird in `Credit Metrics` mit Hilfe von Faktormodellen berechnet.

Dann können Gesamtwahrscheinlichkeiten wie

$$P(S_1 = 0, \ldots, S_n = 3) = P(Y_1 \leq d_{Def}, \ldots, d_B < Y_n \leq d_{BB})$$

berechnet werden. Als Modell für die Abhängigkeitsstruktur des Vektors $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ wird die Gauss'sche Copula(!) verwendet.

Die Risikomasse eines Kreditportfolios werden mit Hilfe von Simulationen berechnet. Es werden viele Szenarien generiert, aufgrund derer der empirische VaR ermittelt wird.

## Ansätze basierend auf gemischte Modelle

Annahme: Zahlungsunfähigkeit eines Kreditnehmers hängt von mehreren (maktoökonomischen) Faktoren, die stochastisch modelliert werden, ab.

Bei einer gegebenen fixen Realisierung dieser Faktoren hängen Zahlungsunfähigkeiten unterschiedlicher Kreditnehmer nicht von einander ab.

## Die Bernoulli gemischte Verteilung

Der 0−1 Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine *Bernoulli gemischte Verteilung (BMV)* wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass

- $X$ bedingt durch $Z$ ein Vektor von unabhängingen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen ist, und
- $P(X_i = 1|Z) = f_i(Z)$, $P(X_i = 0) = 1 - f_i(Z)$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \{0,1\}^n$ gilt

$$P(X = x|Z) = \prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i} (1 - f_i(Z))^{1-x_i}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X=x) = E(P(X=x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i}(1-f_i(Z))^{1-x_i}\Big)$$

Annahme: alle Funktionen $f_i$ sind identisch, $f_i = f$.

Für die Anzahl der Zahlungsunfähigkeitsfällen $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt

$$N|Z \sim \text{Binomial}(n, f(Z))\,.$$

## Die Poisson gemischte Verteilung

Der diskrete Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ hat eine *Poisson gemischte Verteilung (PMV)*, wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $\lambda_i \colon \mathbb{R}^m \to (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gibt, sodass

- $X$ bedingt durch $Z$ ein Vektor von unabhängingen Poisson verteilten Zufallsvariablen ist, und
- $P(X_i = x_i|Z) = \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}$ für $x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt

$$P(X = x|Z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}\Big)$$

## **Die Poisson gemischte Verteilung** (Fortsetzung)

Annahme: $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)^T$ ist PMV mit Faktoren $Z$.

Sei $X_i = I_{[1,\infty)}(\tilde{X}_i)$.

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist BMV mit $f_i(Z) = 1 - e^{-\lambda_i(Z)}$

Falls $\lambda_i(Z)$ klein gilt für die Anzahl der Zahlungsunfähigkeiten:

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \approx \sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

$$\tilde{N}|Z \sim Poisson(\bar{\lambda}(Z)) \text{ wobei } \bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Z)\,.$$

## Beispiele von Bernoulli gemischten Verteilungen

Annahmen:

- $Z$ ist univariat (d.h. es gibt einen Risikofaktor)
- $f_i = f$ für alle $i$

Es gilt: $P(X_i = 1|Z) = f(Z)$, $\forall i$; $N|Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, f(Z))$.

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ersten $k$ Kreditnehmer zahlungsunfähig werden

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) =$$

$$E(P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0|Z)) = E(f(Z)^k(1-f(Z))^{n-k})$$

Sei $G$ die Verteilungsfunktion von $Z$. Dann gilt:

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1-f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Verteilung der Anzahl $N$ der Zahlungsunfähigen Kreditnehmer :

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1 - f(z))^{n-k} d(G(z))$$

## Die Beta-gemischte Verteilung

Es gilt $Z \sim Beta(a,b)$ und $f(z) = z$.

Die Dichte $g$ von Z: $g(z) = \frac{1}{\beta(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}$, für $a, b > 0$, $z \in (0,1)$ wobei $\beta(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz$ die Euler'sche Betafunktion ist.

Verteilung der Anzahl der zahlungsunfähigen Kreditnehmer:

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 z^k (1-z)^{n-k} g(z) dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 z^{a+k-1}(1-z)^{n-k+b-1} dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)} \qquad \textit{beta-binomial Verteilung}$$

## Probit-normal Mischung

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = \phi(\mu + \sigma z)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $\phi$ ist die Standard Normalverteilungsfunktion.

## Logit-normal Mischung

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = (1 + \exp\{\mu + \sigma z\})^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

## CreditRisk$^+$ - Ein Poisson gemischtes Modell

(Entwickelt von CSFB in 1997, siehe Crouhy et al. (2000) und `http://www.credit_suisse.com/investment_banking/research/en/credit_risk.jsp`

$m$ unabhängige Risikofaktoren $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, $Z_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sodass $E(Z_j) = 1$.

$\lambda_i(Z) = \bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j$, $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\bar{\lambda}_i > 0$, $\alpha_j$, $\beta_j$ sind Konstante. $\alpha_j$, $\beta_j$ werden meistens so gewählt, dass $E(\lambda_i(Z)) = \bar{\lambda}_i > 0)$ gilt.

Die Dichte von $Z_j$ ist folgendermassen gegeben: $f_j(z) = \frac{z^{\alpha_j - 1} \exp\{-z/\beta_j\}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}$

Verlust bei Kredit $i$ durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer $i$: $LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$, $1 \le i \le n$, wobei $\lambda_i$ die erwartete deterministische 'Recovery rate' ist und $L_i$ die Höhe von Kredit $i$ ist.

Das Ziel ist, die Verlustverteilung durch eine diskrete Verteilung zu approximieren und für diese die Erzeugende Funktion zu ermitteln.

Sei $Y$ eine diskrete ZV mit Wertebereich $\{y_1, \ldots, y_m\}$ oder eine kontinuierliche ZV mit Dichtefunktion $f(y)$ in $\mathbb{R}$

Die erzeugende Funktion von $Y$ ist definiert als

$$g_Y(t) := E(t^Y) = \sum_{i=1}^{m} t^{y_i} P(Y = y_i) \text{ bzw.}$$

$$g_Y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} t^y f(y) dy \text{ für } t \in [0,1]\,.$$

**Einige Eigenschaften der erzeugenden Funktionen:**

(i) Wenn $Y \sim Bernoulli(p)$ dann $g_Y(t) = 1 + p(t-1)$.

(ii) Wenn $Y \sim Poisson(\lambda)$, dann $g_Y(t) = \exp\{\lambda(t-1)\}$.

(iii) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$g_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(t).$$

(iv) Sei $Y$ eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f$ und sei $g_{X|Y=y}(t)$ die erzeugenden Funktion von $X|Y = y$. Dann gilt

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{X|Y=y}(t) f(y) dy.$$

(v) Sei $g_X(t)$ die erzeugende Funktion von $X$. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) \text{ wobei } g_X^{(k)}(t) = \frac{d^k g_X(t)}{dt^k}.$$

## Die Erzeugende Funktion der Verlustverteilung

Jeder Verlust wird als ganzzahliges Vielfaches einer vordefinierten Verlusteinheit $L_0$ (zB. $L_o = 10^6$ Euro):

$$LGD_i = (1-\lambda_i)L_i \approx \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right] L_0 = v_i L_0 \text{ mit } v_i := \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right]$$

wobei $[x] = \arg\min_t\{|t-x|\colon t \in \mathbb{Z}, t-x \in (-1/2, 1/2]\}$.

Die Verlustfunktion: $L = \sum_{i=1}^n X_i v_i L_0$.

(a) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $N = X_1 + \ldots + X_n$

$X_i|Z \sim Poisson(\lambda_i(Z))$, $\forall i \Longrightarrow g_{X_i|Z}(t) = \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\}$, $\forall i \Longrightarrow$

$$g_{N|Z}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\} = \exp\{\mu(t-1)\}\,, \qquad (5)$$

mit $\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z) = \sum_{i=1}^n (\bar\lambda_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j)$.

$$\begin{aligned} g_N(t) &= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g_{N|Z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\Big\{ \sum_{i=1}^n \Big(\bar\lambda_i \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j\Big)(t-1)\Big\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\Big\{(t-1)\sum_{j=1}^{m}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i a_{ij}}_{\mu_j}\Big)z_j)\Big\} f_1(z_1)\dots f_m(z_m)dz_1\dots dz_m =$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\{(t-1)\mu_1 z_1\} f_1(z_1)dz_1 \dots \exp\{(t-1)\mu_m z_m\} f_m(z_m)dz_m =$$

$$\prod_{j=1}^{m}\int_0^\infty \exp\{z_j\mu_j(t-1)\}\frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} z_j^{\alpha_j-1}\exp\{-z_j/\beta_j\}dz_j \qquad (6)$$

Die Berechnung der einzelnen Integrale in (6) ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}}\exp\{z_j\mu_j(t-1)\}z_j^{\alpha_j-1}\exp\{-z_j/\beta_j\}dz_j = \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$$

$$\delta_j = \beta_j\mu_j/(1+\beta_j\mu_j). \qquad (7)$$

Es gilt also $g_N(t) = \prod_{j=1}^{m} \left( \frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t} \right)^{\alpha_j}$.

(b) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $L = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i L_0$.

Bedingter Verlust aufgrund Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer $i$:

$L_i|Z = v_i(X_i|Z)$; $L_i|Z$ unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$g_{L_i|Z}(t) = E(t^{L_i}|Z) = E(t^{v_i X_i}|Z) = g_{X_i|Z}(t^{v_i}).$$

Die erzeugende Funktion des gesamten Verlusts bedingt durch $Z$:

$$g_{L|Z}(t) = g_{L_1+L_2+\ldots+L_n|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{L_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i|Z}(t^{v_i}) =$$

$$\exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} Z_j \left( \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij} (t^{v_i} - 1) \right) \right\}.$$

Ähnlich wie bei der Berechnung von $g_N(t)$ erhalten wir:

$$g_L(t) = \prod_{j=1}^{m} \left( \frac{1-\delta_j}{1-\delta_j \Lambda_j(t)} \right)^{\alpha_j} \text{ wobei } \Lambda_j(t) = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij} t^{v_i}.$$

$\delta_j$ und $\mu_j$ sind wie in (7) bzw. (5) gegeben.

**Beispiel 3** *Kreditportfolio mit $n = 100$ Krediten, Anzahl der Risikofaktoren $m = 1$ oder $m = 5$, $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda} = 0.15$, für $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_j = \alpha = 1$, $\beta_j = \beta = 1$, $a_{i,j} = 1/m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$*

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} g_N^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \frac{d^k g_N}{dt^k}.$$

*Für die Berechnung von $P(N = k)$, $k = 0, 1, \ldots, 100$, kann folgende rekursive Formel verwendet werden:*

$$g_N^{(k)}(0) = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} g_N^{(k-1-l)}(0) \sum_{j=1}^{m} l! \alpha_j \delta_j^{l+1}, \; k > 1$$

## Monte Carlo Methoden in Kreditrisiko-Management

$P$ Kreditportfolio bestehend aus $m$ Krediten;
Verlustfunktion $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$; Die Verluste $L_i$ sind unabhängig bedingt durch einen Vektor $Z$ von ökonomischen Einflussfaktoren.

Gesucht:

$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(L)$, $CVaR_\alpha = E(L|L > q_\alpha(L))$, $CVaR_{i,\alpha} = E(L_i|L > q_\alpha(L))$.

Bei Anwendung von Monte Carlo (MC) Simulation tritt das Problem der Simulation von seltenen Ereignissen auf ("rare event simulation")!

ZB. $\alpha = 0,99$. Nur etwas 1% der standard MC Simulationen führt zu einem Verlust $L$, sodass $L > q_\alpha(L)$.

Standard MC Schätzer:

$$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)} \sum_{i=1}^{n} L_i I_{(q_\alpha,+\infty)}(L_i)$$

wobei $L_i$ der Verlustwert in der $i$-ten Simulationslauf ist.

$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L)$ ist sehr instabil, d.h. hat eine sehr hohe Varianz, wenn die Anzahl der Simulationen $n$ nicht sehr sehr groß ist.

**Grundlagen von "Importance Sampling"**

Sei $X$ eine ZV in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit absolut stetiger Verteilungsfunktion und Dichtefunktion $f$.

Gesucht: $\theta = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$ für eine bekannte Funktion $h$.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A$: $h(x) = I_A(x)$.

Berechnung von CVaR: $h(x) = xI_{x>c}(x)$ mit $c = VaR(X)$.

**Algorithmus 1** *(Monte Carlo Integration)*

*(1) Generiere $X_1$,$X_2$,. . . , $X_n$ unabhängig aus der Dichte $f$.*

*(2) Berechne den standard MC Schätzer $\widehat{\theta}_n^{(MC)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$.*

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n^{(MC)} = \theta$ gilt fast sicher.

Im Falle von *seltenen Ereignissen* (zB. $h(x) = I_A(x)$, $P(A) << 1$) ist die Konvergenz sehr langsam.

Sei $g$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, sodass $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$.

Wir definieren das *Likelihood Ratio* als: $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) > 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}$

Es gilt:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)g(x)dx = E_g(h(x)r(x)) \tag{8}$$

**Algorithmus 2** *(Importance Sampling)*

*(1) Generiere* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *unabhängig aus der Dichte* $g$.

*(2) Berechne den IS-Schätzer* $\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)r(X_i)$.

$g$ heißt "Importance Sampling"-Dichte.

Ziel: Auswahl einer "Importance Sampling"-Dichte, sodass die Variance des IS-Schätzers wesentlich kleiner als die Varianz des standard MC-Schätzers ist.

$$var\left(\widehat{\theta}_n^{(IS)}\right) = \frac{1}{n^2}(E_g(h^2(X)r^2(X)) - \theta^2)$$

$$var\left(\widehat{\theta}_n^{(MC)}\right) = \frac{1}{n^2}(E(h^2(X)) - \theta^2)$$

Theoretisch kann die Varianz des IS-Schätzers auf 0 reduziert werden!

Annahme $h(x) \geq 0, \forall x$.

Für $g^*(x) = f(x)h(x)/E(h(x))$ gilt: $\widehat{\theta}_1^{(IS)} = h(X_1)r(X_1) = E(h(X))$.

Der IS-Schätzer gibt den richtigen Wert nach einer einzigen Simulation!

Sei $h(x) = I_{\{X \geq c\}}(x)$ wobei $c >> E(X)$ (seltenes Ereignis). Es gilt $E(h^2(X)) = P(X \geq c)$ und

$$E_g(h^2(X)r^2(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r^2(x)g(x)dx = E_g(r^2(X); X \geq c) = \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)f(x)dx = E_f(r(X); X \geq c) \tag{10}$$

Das Ziel ist $g$ so auszuwählen, dass $E_g(h^2(X)r^2(X))$ klein wird, oder sodass $r(x)$ für $x \geq c$ klein und das Ereignis $X \geq c$ unter der Dichte $g$ wahrscheinlicher als unter der Dichte $f$ ist.