

## **Was ist Kreditrisiko?**

Zitat von McNeil, Frey und Embrechts (2005):

*Credit risk is the risk that the value of a portfolio changes due to unexpected changes in the credit quality of issuers or trading partners. This subsumes both losses due to defaults and losses caused by changes in credit quality such as the downgrading of a counterparty in an internal or external rating system*

## **Beispiele Kreditrisiko-behaftete Finanzinstrumente**

- Portfolios von Unternehmensanleihen
- OTC (“over the counter”) Transaktionen
- Handel im Bereich der Kreditderivate

## Kreditrisiko: ein einfaches Modell

$P$ : Portfolio von  $n$  risikoreichen Anleihen in der Höhe  $L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$p_i$ : Wahrscheinlichkeit, dass Kreditnehmer  $i$  zahlungsunfähig wird.

$1 - \lambda_i$ : Anteil des Verlustes aus Anleihe  $i$  falls Kreditnehmer  $i$  zahlungsunfähig wird.  $\lambda_i \in [0, 1]$  heißt "recovery rate" von Anleihe  $i$ .

Verlust in Falle von Zahlungsunfähigkeit ("loss-given-default"):

$$LGD_i = (1 - \lambda_i)L_i$$

Bernoulli ZV  $X_i$ : Status des Kreditnehmers  $i$  zum Zeitpunkt  $T$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist zahlungsunfähig} \\ 0 & \text{Kreditnehmer } i \text{ ist nicht zahlungsunfähig} \end{cases}$$

Es gilt  $p_i = P(X_i = 1)$

Gesamtverlust zum Zeitpunkt  $T$ :

$$L = \sum_{i=1}^n X_i \cdot LGD_i = \sum_{i=1}^n X_i(1 - \lambda_i)L_i$$

.

Verteilung von  $L$  hängt von der Gesamtverteilung von  $(X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  ab.

Das einfachste Modell:

- $L_i = L_1, \forall i$
- recovery rates sind deterministisch und  $\lambda_i = \lambda_1, \forall i$
- $X_i$  sind i.i.d. mit Wahrscheinlichkeit  $p$

Dann gilt  $L = LGD_1 \cdot N$  mit  $N = \sum_{i=1}^n X_i \sim Binomial(n, p)$ .

### Modelle mit latenten Variablen

Die Kreditnehmer werden in  $m + 1$  homogene Kategorien geteilt; alle Kreditnehmer einer Gruppe haben dieselbe Wahrscheinlichkeit zahlungsunfähig zu werden (*default Wahrscheinlichkeit*).

Historische Beobachtungen der Anzahl der Kreditnehmer einer Kategorie, die Zahlungsunfähig werden  $\implies$  Schätzung der Default Wahrscheinlichkeit für Kreditnehmer der entsprechenden Kategorie.

Status Variable  $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ ,  $S_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,

$S_i = 0$  entspricht der Zahlungsunfähigkeit

$S_i = j \in \{1, 2, \dots, m\}$  entspricht den unterschiedlichen Einteilungskategorien, könnten zB. Rating Klassen sein.

Dann gilt  $X_i = \begin{cases} 0 & S_i \neq 0 \\ 1 & S_i = 0 \end{cases}$

$S = (S_1, S_2, \dots, S_n)^T$  wird mit Hilfe der latenten Variablen  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$  modelliert.

$Y_i$  könnte zB. der Wert der Aktien von Kreditnehmer  $i$ .

Seien  $d_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, m + 1$  Schwellwerte, sodass  $d_{i,0} = -\infty$  und  $d_{i,m+1} = \infty$ .

Dann gilt:  $S_i = j \iff Y_i \in (d_{i,j}, d_{i,j+1}]$ .

Sei  $F_i$  die Verteilungsfunktion von  $Y_i$

Default Wahrscheinlichkeit:  $p_i = F_i(d_{i,1})$ .

Wahrsch., dass die ersten  $k$  Kreditnehmer zahlungsunfähig werden:

$$\begin{aligned} p_{1,2,\dots,k} &= P(Y_1 \leq d_{1,1}, Y_2 \leq d_{2,1}, \dots, Y_k \leq d_{k,1}) \\ &= C(F_1(d_{1,1}), F_2(d_{2,1}), \dots, F_k(d_{k,1}), 1, 1, \dots, 1) = C(p_1, p_2, \dots, p_k, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

D.h. die Gesamt-default-Wahrscheinlichkeit hängt wesentlich von der Copula  $C$  ab.

**Das KMV Modell** (siehe auch [www.moodyanalytics.com](http://www.moodyanalytics.com))

Die Status Variablen  $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  können nur zwei Werte 0 und 1 annehmen, d.h.  $m = 1$ .

Die latenten Variablen  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$  hängen mit dem Wert der Aktien der jeweiligen Firmen folgendermaßen zusammen.

### **Das Modell von Merton**

Die Bilanz jeder Firma besteht aus 2 Positionen:  
Aktiva (Aktien) und Passiva (Verbindlichkeiten bzw. Schulden und Eigenkapital bzw. Stammkapital).

$V_{A,i}(T)$ : Wert der Aktien der Firma  $i$  zum Zeitpunkt  $T$

$K_i := K_i(T)$ : Wert der Schulden der Firma  $i$  zum Zeitpunkt  $T$

$V_{E,i}(T)$ : Wert des Stammkapitals der Firma  $i$  zum Zeitpunkt  $T$

**Annahme:** Zukünftiger Wert der Aktien wird als geometrische Brown'sche Bewegung modelliert

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t) \exp \left\{ \left( \mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) (T - t) + \sigma_{A,i} (W_i(T) - W_i(t)) \right\},$$

$\mu_{A,i}$  ist die Drift,  $\sigma_{A,i}$  ist die Volatilität und  $(W_i(t): 0 \leq t \leq T)$  ist eine Standard Brown'sche Bewegung (Wiener Prozess).

D.h.  $(W_i(T) - W_i(t)) \sim N(0, T - t)$ .

Daraus folgt  $\ln V_{A,i}(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$

mit  $\mu = \ln V_{A,i}(t) + \left( \mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) (T - t)$  und  $\sigma^2 = \sigma_{A,i}^2 (T - t)$ .

Weiters gilt:  $X_i = I_{(-\infty, K_i)}(V_{A,i}(T))$

Setze  $Y_i = \frac{W_i(T) - W_i(t)}{\sqrt{T - t}} \sim N(0, 1)$ .

Dann gilt:  $X_i = I_{(-\infty, K_i)}(V_{A,i}(T)) = I_{(-\infty, -DD_i)}(Y_i)$  wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + \left( \mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma_{A,i} \sqrt{T - t}} \quad (1)$$

$DD_i$  heißt *distance-to-default*.

## Berechnung des “distance to default”

Schwierigkeit:  $V_{A,i}(t)$  kann nicht beobachtet werden  
Aber  $V_{E,i}(t)$  kann beobachtet werden.

KMV's Auffassung: Die Geldgeber besitzen die Firma solange die Schulden seitens der Stammkapitalbesitzer (Equity holders) nicht vollständig bezahlt werden



$V_{E,i}(T)$  ist daher der Preis einer Call Option über die Aktien der Firma mit Strike Price den Buchwert der Schulden zum Zeitpunkt  $T$ :

$$V_{E,i}(T) = \max\{V_{A,i}(T) - K_i, 0\}$$

Aus der Black-Scholes Formula (Optionspreistheorie):

$$V_{E,i}(t) = C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) = V_{A,i}(t)\phi(e_1) - K_i e^{-r(T-t)}\phi(e_2) \quad (2)$$

wobei

$$e_1 = \frac{\ln(V_{A,i}(t) / K_i) + (r + \sigma_{A,i}^2/2)(T - t)}{\sigma_{A,i}(T - t)} \quad \text{und} \quad e_2 = e_1 - \sigma_{A,i}(T - t)$$

$\phi$  ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung und  $r$  ist der risikofreie Zinssatz.

Im KMV Modell gilt weiters:

$$\sigma_{E,i} = g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \quad (3)$$

Beobachtung/Schätzung von  $V_{E,i}(t)$  bzw.  $\sigma_{E,i}$  aus historischen Beobachtungen

↓

Einsetzen in (2) und (3) und Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} V_{E,i}(t) &= C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) \\ \sigma_{E,i} &= g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \end{aligned} \quad (4)$$

um  $V_{A,i}(t)$  und  $\sigma_{A,i}$  zu ermitteln

↓

Verwendung dieser Werte zur Berechnung von  $DD_i$  aus (1).



## Die erwartete Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit (expected default frequency, EDF)

KMV Modell evaluiert nicht direkt die Default Wahrscheinlichkeit  
 $p_i = P(Y_i < -DD_i)$

Ermittlung von Firmen die historisch gesehen je einen “distance-to-default” von ca.  $DD_i$  hatten.

Ermittlung der Häufigkeit von Zahlungsunfähigkeit für diese Firmen als Schätzer für die Default-Wahrscheinlichkeit  $p_i$ .

Dieser Schätzer wird *expected default frequency*, (*EDF*) genannt.

Zusammenfassung des univariaten KMV Modells zur Berechnung der Default Wahrscheinlichkeit für eine Firma:

- Ermittlung des Aktienwertes  $V_{A,i}$  und dessen Volatilität  $\sigma_{A,i}$  mit Hilfe der Beobachtungen über Marktwert und Volatilität der Equities ( $V_{E,i}$  bzw.  $\sigma_{E,i}$ ) sowie der Schulden  $K_i$  als Lösung des Gleichungssystems (4).
- Berechnung der “distance-to-default”  $DD_i$  aus (1)
- Berechnung der Default-Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  mit Hilfe einer empirischen Verteilung, die den Zusammenhang zwischen Default-Wahrscheinlichkeit und “distance-to-default” modelliert (zB. mit Hilfe von EDF)