Cash flow matching: ein kurzfristiges Finanzierungsmodell

Monat	Jän.	Feb.	Mär.	Apr.	Jun.	Jul.
Netto Geldfluss[1] (in €10^3)	-150	-100	200	-200	50	300

Finanzierungsinstrumente:

- Kredit bis €10^5, Laufzeit 1 Monat, Zinssatz 1% am Ende der Laufzeit
- Emmission von Wertpapieren mit Laufzeit 3 Monate, Zinssatz 2% über die 3 Monate
- Überschüssiges Geld kann mit einem Zinssatz von 0.3% im Monat investiert werden

Frage: Welche Finanzierungsinstrumente und in welcher Höhe soll das Unternehmen einsetzen um die Verpflichtungen über den 6 monatigen Zeithorizont zu erfüllen, sodass das Endkapital am Ende des Zeithorizonts maximiert wird?

[1] Negative Zahlen entsprechen Ausgaben, positive Zahlen entsprechen Einnahmen

Lineares Optimierungsmodell

Entscheidungsvariablen:

x_i: Höhe des Kredits im Monat i, $1 \leq i \leq 5$

y_i: Wert der im Monat i emittierten Wertpapiere, $1 \leq j \leq 3$

z_i: Überschuss am Ende des i-ten Monats, $1 \leq i \leq 5$

v: Überschuss/Vermögen des Unternehmens am Ende des Zeithorizonts

$$
\begin{array}{lll}
\max & v & \\
\text{s.t.} & & \\
& x_1 + y_1 - z_1 & = 150 \\
& x_2 + y_2 - 1.01x_1 + 1.003z_1 - z_2 & = 100 \\
& x_3 + y_3 - 1.01x_2 + 1.003z_2 - z_3 & = -200 \\
& x_4 - 1.02y_1 - 1.01x_3 + 1.003z_3 - z_4 & = 200 \\
& x_5 - 1.02y_2 - 1.01x_4 + 1.003z_4 - z_5 & = -50 \\
& -1.02y_3 - 1.01x_5 + 1.003z_5 - v & = -300 \\
& 0 \leq x_i \leq 100\,,\ 1 \leq i \leq 5 & \\
& y_i \geq 0\,,\ 1 \leq i \leq 3 & \\
& z_i \geq 0\,,\ 1 \leq i \leq 5 & \\
& v \geq 0 &
\end{array}
$$

Lösung und Output der Sensitivitätsanalyse

Basisvariablen	Wert	$LB_i^{(c_B)}$	$UB_i^{(c_B)}$
x_2	50.9803	0	0.0032
x_5	0	-10^{30}	0
y_1	150	-0.0032	0.0040
y_2	49.0196	-0.0032	0
y_3	203.4343	0	0.0071
z_3	351.9441	-0.0032	0.0039
v	92.4969	-1	10^{30}

Nichtbasisvariablen	Wert	Red. Kosten	$LB_i^{(C_N)}$	$UB_i^{(C_N)}$
x_1	0	-0.0032	-10^{30}	0.0032
x_3	0	-0.0071	-10^{30}	0.0071
x_4	0	-0.0032	-10^{30}	0.0032
z_1	0	-0.0040	-10^{30}	0.0040
z_2	0	-0.0071	-10^{30}	0.0071
z_4	0	-0.0039	-10^{30}	0.0039
z_5	0	-0.007	-10^{30}	0.007

Restriktionen (Monate)	$LB_i^{(b)}$	$UB_i^{(b)}$	Schattenpreise
Jän.	-150	89.17	-1.037
Feb.	-50.980	49.020	-1.030
Mär.	-203.434	90.683	-1.020
Apr.	-204.044	90.955	-1.017
Mai	-52	50	-1.010
Jun.	-10^{30}	92.497	-1

Restriktionen (obere Schranken)	$UB_i^{(b)}$	$LB_i^{(b)}$	Schattenpreise
x_1	10^{30}	-100	0
x_2	10^{30}	-49.02	0
x_3	10^{30}	-100	0
x_4	10^{30}	-100	0
x_5	10^{30}	-100	0

Zusammenfassung der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse der linearen Optimierung (Maximierungsproblem)

- Veränderung des Kostenkoeffizienten $c_{B(i)}$ der i-ten Basisvariable $x_{B(i)}$:
  $\tilde{C}_B = C_B + \Delta_i \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)^t$
  Die Basis bleibt zulässig und die Basislösung bleibt unverändert. Die Basislösung bleibt optimal, dann und nur dann wenn $\Delta_i \in \left[LB_i^{(C_B)}, UB_i^{(C_B)}\right]$, wobei

$$UB_i^{(C_B)} := \min\left\{\frac{(\bar{C}_N)_j}{(\bar{A}_N)_{ij}} : j \in \{1, 2, \ldots, n-m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} < 0\right\}$$

$$LB_i^{(C_B)} := \max\left\{\frac{(\bar{C}_N)_j}{(\bar{A}_N)_{ij}} : j \in \{1, 2, \ldots, n-m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} > 0\right\}$$

  und $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$. Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_i \cdot (A_B^{-1} b)_i$.

- Veränderung des Kostenkoeffizienten $c_{N(j)}$ der j-ten Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$:
  $\tilde{C}_N = C_N + \Delta_j \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)^t$
  Die Basis bleibt zulässig und die Basislösung bleibt unverändert. Die Basislösung bleibt optimal, dann und nur dann wenn $\Delta_j \leq -\bar{C}_{N(j)}$; $\bar{C}_N$ sind die reduzierten Kostenkoefficienten mit $\bar{C}_N^t := C_N^t - C_B^t A_B^{-1} A_N$.

Zusammenfassung der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse der linearen Optimierung (Maximierungsproblem)

- Veränderung des Wertes einer Nicht-Basisvariablen $x_{N(j)}$: $\tilde{X}_N = X_N + \Delta_j \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)^t$

  Die Lösung bleibt zulässig dann und nur dann, wenn $0 \leq \Delta_j \leq UB_j^{(X_N)}$ wobei

  $$UB_j^{(X_N)} := \min \left\{ \frac{(\bar{b})_i}{(\bar{A}_N)_{ij}} : i \in \{1, 2, \dots, m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} > 0 \right\}$$

  Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_j \cdot \bar{C}_{N(j)}$, d.h. die veränderte Lösung ist dann und nur dann optimal, wenn $\bar{C}_{N(j)} = 0$.

- Veränderung des Koeffizienten der rechten Seite b_i in der i-ten Restriktion:
  $\tilde{b}_i = b_i + \Delta_i \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)^t$
  Das Optimalitätskriterium bleibt erfüllt.

  Die Basis bleibt dann und nur dann zulässig (und somit auch optimal), wenn $\Delta_i \in \left[LB_i^{b)}, UB_i^{b} \right]$, wobei

  $$UB_i^{(b)} := \min \left\{ -\frac{(X_B)_j}{(A_B^{-1})_{ji}} : j \in \{1, 2, \dots, m\}, (A_B^{-1})_{ji} < 0 \right\}$$

  $$LB_i^{(b)} := \max \left\{ -\frac{(X_B)_j}{(A_B^{-1})_{ji}} : j \in \{1, 2, \dots, m\}, (A_B^{-1})_{ji} > 0 \right\}$$

  Die neue Basislösung ist durch $\tilde{X}_B = X_B + \Delta_i A_B^{-1} \cdot (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, $\tilde{X}_N = X_N = \vec{0}$ gegeben.

  Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_i \cdot c_B^t \big((A_B^{-1})_{\cdot,i} \big)$, wobei $(A_B^{-1})_{\cdot,i}$ die i. Spalte der Matrix A_B^{-1} darstellt. Die Größe $c_B^t \big((A_B^{-1})_{\cdot,i} \big)$ heißt **Schattenpreis der i-ten Restriktion.**

Ein weiteres LP-Modell: „dedicated portfolio“

Dieser Ansatz wird verwendet um ein Portfolio zu konstruieren, dessen positiver Kapitalfluss, den Verpflichtungen eines Unternehmens entspricht. So ein Portfolio enthält in der Regel risikolose, endfällige Anleihen (risk-free non-callable bonds) und hat somit kein Zinsrisiko. Das Portfolio bleibt unverändert bis alle Verpflichtungen, die es abdecken sollte, beglichen sind.

Ein Beispiel:

Annahme: Der Nominalwert aller Anleihen ist 100.

Periode (Jahr) t	1	2	3	4	5	6	7	8
Verpflichtung L_t in €10^3	12	18	20	20	16	18	12	10

Anleihenindex	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i (in €)	102	90	101	98	98	104	100	101	102	94
Coupon c_i	5	3.5	5	3.5	4	9	6	8	9	7
Fälligkeit m_i	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8

Überschüsse werden nicht investiert, sie verbleiben im Portfolio.

Sei T die Länge des Planungszeitraums, $T = 8$, N die Anzahl der Anleihen, $N = 10$, und z_0 das im Portfolio zu investierende Kapital am Anfang des Planungshorizonts.

Ziel: Aufstellung eines „dedicated portfolio“ mit minimalen Kosten,

Das lineare Optimierungsmodell

Entscheidungsvariablen:

x_i: Höhe des in Anleihe i investierten Kapitals, $1 \le i \le N$
(mit Einheit 100 Euro)

z_t: Überschuss am Ende des Jahr t, $1 \le t \le T$

$$
\begin{array}{ll}
\min & z_0 + \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \\
\text{s.t.} & \\
& \displaystyle\sum_{\substack{i=1:\\ m_i \ge t}}^{N} c_i x_i + \sum_{\substack{i=1:\\ m_i = t}}^{N} x_i - z_t + z_{t-1} = L_t \quad \forall 1 \le t \le T \\
& \\
& x_i \ge 0\,,\ 1 \le i \le N \\
& z_t \ge 0\,,\ 1 \le t \le T
\end{array}
$$

Lösung und Output der Sensitivitätsanalyse

Basisvariablen	Wert	$LB_i^{(c_B)}$	$UB_i^{(c_B)}$
x_1	62.1361	−5.5909	3
x_3	125.2429	−3.3110	0.8426
x_4	151.5050	−4.7123	3.3741
x_5	156.8077	−17.2316	4.9172
x_6	123.0800	−3.7481	9.0355
x_8	124.1572	−8.6554	3.9888
x_9	104.0898	−0.8605	9.4568
x_{10}	93.4579	−93.4579	0.9000

Nichtbasisvariablen	Wert	Red. Kosten	$LB_i^{(C_N)}$	$UB_i^{(C_N)}$
x_2	0	0.8386	−0.8386	10^{30}
x_7	0	8.7868	−8.7868	10^{30}
z_0	0	0.0285	−0.0285	10^{30}
z_1	0	0.0557	−0.0557	10^{30}
z_2	0	0.0326	−0.0326	10^{30}
z_3	0	0.0472	−0.0472	10^{30}
z_4	0	0.1793	−0.1793	10^{30}
z_5	0	0.0369	−0.0369	10^{30}
z_6	0	0.0867	−0.0867	10^{30}
z_7	0	0.0084	−0.0084	10^{30}
z_8	0	0.5242	−0.5242	10^{30}

Restriktionen (über die Jahre)	$LB_i^{(b)}$	$UB_i^{(b)}$	Schattenpreise
1	−6524.29	10^{30}	0.9714
2	−13150.50	137010.16	0.9156
3	−15680.77	202579.30	0.8830
4	−16308.00	184347.17	0.8357
5	−13415.72	89305.96	0.6563
6	−13408.98	108506.74	0.6194
7	−11345.79	105130.97	0.5327
8	−10000	144630.19	0.5242