

Optimierung in der Finanzmathematik SS 2020

2. Übungsblatt

10. Betrachten Sie die Daten aus Übungsbeispiel 9 und stellen Sie ein Portfoliooptimierungsproblem auf, das die absoluten Abweichung als Risikomaß verwendet, d.h. ein Problem, das dem MAD Modell von Konno und Yamazaki entspricht (siehe Vorlesung). Als Schätzer für die erwarteten monatlichen Erträge der einzelnen Assets sollten die geometrischen Mittel der jeweiligen Zeitreihen verwendet werden. Sei r eine Mindestgrenze für den erwarteten monatlichen Gesamtportfolioertrag. Bestimmen Sie r_{\min} und r_{\max} wie in Übungsbeispiel 9. Legen Sie auf das Intervall $[r_{\min}, r_{\max}]$ ein uniformes Gitter mit 21 Knoten (19 innere Knoten) und berechnen Sie das optimale MAD Portfolio für jeden Gitterpunkt r . Tragen Sie die optimalen Portfolios in eine Effizienzfront auf, analysieren Sie die Ergebnisse und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus Übungsbeispiel 9.

Achtung: Auch im Fall des MAD Modells besteht die Effizienzfront aus den Punkten $(\sigma(x(r)), R(x(r)))$ für alle oben genannten Gitterpunkte r ; $x(r)$ ist eine Optimallösung des MAD Modells mit Parameter r ist und $\sigma(x(r)), R(x(r))$ sind die Standardabweichung des Ertrags bzw. der erwartete Ertrag von $x(r)$. Lässt der Vergleich der zwei Effizienzfronten den Schluss zu, dass die Erträge der berücksichtigten Assets annähernd normalverteilt sind?

11. Verwenden Sie den Black-Litterman Ansatz und bestimmen Sie die Effizienzfront für die Portfolios aus Übungsbeispiel 9 unter Berücksichtigung der folgenden Erwartungen (neben den historischen Daten):
- Der wöchentliche erwartete Ertrag von Nasdaq (NC) wird um 3% niedriger als der erwartete Ertrag des S&P 500 (S&P500) ausfallen.
 - Der durchschnittliche wöchentliche erwartete Ertrag von NC und Dow wird um 5% höher als der erwartete Ertrag des Russell 2000 ausfallen.

Betrachten Sie zwei Szenarien für die Zuversicht an diesen Erwartungen: (a) große Zuversicht, die durch $\omega_1 = \omega_2 = 0,0001$ modelliert wird, und (b) moderate Zuversicht in der ersten Erwartung und geringe Zuversicht in der zweiten, die durch $\omega_1 = 0,01$ und $\omega_2 = 0,1$ modelliert werden (siehe Vorlesung). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den jeweiligen Ergebnissen aus Übungsbeispiel 9.

12. Betrachten Sie das folgende quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1x_2 + x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{udNb} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_i \geq 0, \text{ für } i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der KKT Bedingungen, dass $x^* = (1/2, 1/2, 0)^t$ die Optimallösung dieses Problems ist.

13. Betrachten Sie das folgende quadratische Optimierungsproblem zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz in dem auch „short“ Investitionen erlaubt sind:

$$\min\{x^t \Sigma x : x = (x_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

Hier ist n die Anzahl der Assets im Portfolio und Σ die positiv-definite Kovarianzmatrix der Erträge der Assets im Portfolio.

Verwenden Sie die KKT Bedingungen um eine geschlossene Formel für die eindeutige Optimallösung dieses Problem zu ermitteln. Bestimmen Sie auch eine geschlossene Formel zur Bestimmung der dazugehörigen Lagrange Multiplikatoren.

14. Klassifikationsprobleme.

Bei einem Klassifikationsproblem sollen unterschiedliche Einheiten nach gewissen Eigenschaften klassifiziert werden. Denken Sie zB. an Aktien, die nach Preis, Preis/Ertrag Quotient, Wachstum, Wachstumsraten, usw. klassifiziert werden sollen (zB. in Wachstum-Aktien, sogenannte „growth stocks“, und Wert-Aktien, sogenannte „value stocks“). In der Regel erhält man zunächst eine *Trainingsmenge* von Einheiten, für die sowohl die Realisierungen aller relevanten Merkmale als auch die Klassenzuordnung bekannt sind. Beim linearen Klassifikationsproblem wird in zwei Klassen A und B klassifiziert. Dazu werden zwei Parameter $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gesucht, sodass $w^t x \leq \gamma - 1$ für alle Einheiten x aus A und $w^t x \geq \gamma + 1$ für alle Einheiten x aus B gilt. Hierbei ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, der die Realisierungen der einzelnen für die Klassifikation maßgeblichen Eigenschaften (n an der Zahl) quantitativ darstellt. Falls ein Vektor w und ein Skalar γ wie oben existieren, dann heißen die zwei Klassen der Trainingsmenge *linear separierbar* und die Hyperebenen $w^t x = \gamma - 1$ und $w^t x = \gamma + 1$ heißen *separierende Hyperebenen*. Für eine gegebene Trainingsmenge sind die separierenden Hyperebenen in der Regel nicht eindeutig und es ist oft erwünscht, separierende Hyperebenen mit maximalem Euklidischen Abstand zu bestimmen. (Der Euklidische Abstand zwischen zwei separierenden Hyperebenen wird *margin* genannt. Für zwei als Punktmengen in \mathbb{R}^n betrachtete Hyperebenen f und g ist der Euklidische Abstand, d.h. der margin $m(f, g)$, als $m(f, g) := \min\{d(a, b) : a \in f, b \in g\}$ definiert, wobei $d(a, b)$ der Euklidische Abstand zwischen $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist.)

Nach der Bestimmung der separierenden Hyperebenen für eine gegebene Trainingsmenge erfolgt die Klassifizierung jeder weiteren Einheit nur anhand des Wertes von $w^t x$, wobei x die Realisierungen der einzelnen n Eigenschaften der Einheit quantitativ darstellt. Falls $w^t x \leq \gamma - 1$, dann wird x der Klasse A zugeordnet, falls $w^t x \geq \gamma + 1$, so wird x der Klasse B zugeordnet.

- (a) Formulieren Sie das lineare Klassifikationsproblem, d.h. die Bestimmung eines Vektors w^t und eines Skalars γ , die den Euklidischen Abstand zwischen den separierenden Hyperebenen maximieren, als quadratisches Optimierungsproblem.
- (b) Die oben beschriebene Idee der linearen Separation kann auch in dem Fall verwendet werden, wenn die zwei Klassen der Trainingsmenge nicht linear separierbar sind. In diesem Fall hat das Problem aus (a) keine Lösung. Das Modell kann jedoch so erweitert werden, dass Verletzungen der Separationsbedingungen erlaubt und anhand von nicht-negativen Variablen modelliert werden. Die Zielfunktion kann dann so aufgesetzt werden, dass (i) der Abstand zwischen den zwei *quasi-separierenden* Hyperebenen maximiert wird, und (ii) die Summe der Verletzungen der Separationsbedingungen minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als quadratisches Optimierungsproblem und führen Sie einen Steuerungsparameter ein, der die relative Gewichtung der beiden Ziele (i) und (ii) in der zusammengesetzten Zielfunktion steuert.
- (c) Betrachten Sie das Klassifikationsproblem aus (a), wobei der Abstand zwischen den zwei separierenden Hyperebenen nicht mit Hilfe der Euklidischen Norm sondern mit Hilfe der Norm l_∞ in \mathbb{R}^n definiert wird, d.h. $m(f, g) := \min\{d_\infty(a, b) : a \in f, b \in g\}$ wobei $d_\infty(a, b) := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$. Lässt sich dieses Klassifikationsproblem als lineares Optimierungsproblem formulieren?

15. Minimierung der Summe der Fehlerquadrate

Angenommen (x_i, y_i) , $i \in \overline{1, N}$, ist eine Stichprobe aus einer Gesamtverteilung (X, Y) eines p -dimensionalen Zufallsvektors X und einer Zufallsvariable Y , i.e. $x_i \in \mathbb{R}^p$, $y_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \overline{1, N}$. Diese Stichprobe wird zur Schätzung der Koeffizienten $\beta \in \mathbb{R}^p$ eines linearen Regressionsmodells $Y = \beta^T X + \epsilon$ verwendet. Der übliche Ansatz dazu ist die Lösung des folgenden Minimierungsproblems

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^N (\beta^T x_i - y_i)^2.$$

- (a) Formulieren Sie dieses Problem als konvex-quadratisches Optimierungsproblem und ermitteln Sie die bekannte Formel zur Berechnung der Koeffizienten eines linearen Regressionsmodells unter der Annahme, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times p}$, deren i -te Zeile mit dem Zeilenvektor x_i^T übereinstimmt, vollen Spaltenrang hat. Dabei gilt $N > p$.

- (b) Falls $N < p$ dann spricht man von einem *hoch dimensionalen Problem*. In diesem Fall wird der Zielfunktion ein Strafterm hinzugefügt um die Größe der Koeffizienten β klein zu halten bzw. gegen Null zu drücken. Dazu gibt es zwei verbreitete Ansätze „the ridge regression“ (RR) und „the lasso regression“ (LR). Im RR Modell lautet das Optimierungsproblem

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|A\beta - y\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_2^2,$$

wobei λ ein Steuerungsparameter und $\|\beta\|_2$ die Euklidische Norm von β ist.

Geben Sie in diesem Fall eine Formel zur Berechnung der Koeffizienten β an¹.

16. Das Black-Litterman Modell

Eine Normalverteilung $N_n(\pi, Q)$ wird als A-priori-Verteilung des Vektors μ der erwarteten Erträge der n Assets im Portfolio angenommen, d.h. $\mu \sim N_n(\pi, Q)$. Es wird weiters angenommen, dass $P\mu = q + \epsilon$ gilt, wobei $\epsilon \sim N_k(0, \Omega)$ und $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $q \in \mathbb{R}^p$ deterministische Größen sind.

- (a) Betrachten Sie zuerst den Fall $\Omega = 0$, der einer deterministischen Bedingung $P\mu = q$ entspricht. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \pi \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \epsilon_\pi \\ P\mu \end{bmatrix}, \epsilon_\pi \sim N_n(0, Q).$$

Der A-posteriori-Schätzer von μ ergibt sich als Optimallösung des folgenden Problems

$$\min \left\{ (\pi - \mu)^T Q^{-1} (\pi - \mu) : \mu \in \mathbb{R}^n, P\mu = q \right\},$$

wobei Q als positiv semidefinit, und somit regulär, angenommen wird. Zeigen Sie mit Hilfe der KKT Bedingungen, dass das folgende $\hat{\mu}$ die Optimallösung des obigen Problems ist

$$\hat{\mu} = \pi + QP^T(PQP^T)^{-1}(q - P\pi).$$

- (b) Betrachten Sie jetzt den Fall $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, wobei Ω_1 eine reguläre Matrix ist. Diese Annahme entspricht der Aufteilung der Expertenmeinungen in zwei Blöcken, sodass die Meinungen des zweiten Blocks als sichere, deterministische Aussagen, betrachtet werden:

$$P\mu = \begin{bmatrix} P_1\mu \\ P_2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 + \epsilon_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \epsilon_1 \sim N(0, \Omega_1).$$

Es wird weiters angenommen, dass ϵ_π und ϵ_1 unabhängig sind. Zusammenfassend gilt dann

$$\begin{bmatrix} \pi \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \epsilon_\pi \\ P_1\mu + \epsilon_1 \\ P_2\mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \epsilon_\pi \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} \sim N_n(0, \Sigma), \Sigma = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \Omega_1 \end{bmatrix}.$$

Der A-posteriori-Schätzer von μ ergibt sich nun als Optimallösung des folgenden Problems

$$\min \left\{ \begin{bmatrix} \pi - \mu \\ q_1 - P_1\mu \end{bmatrix}^T \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \pi - \mu \\ q_1 - P_1\mu \end{bmatrix} : \mu \in \mathbb{R}^n, P_2\mu = q_2 \right\}. \quad (1)$$

Zeigen Sie mit Hilfe der KKT Bedingungen, dass das folgende $\hat{\mu}$ die Optimallösung des obigen Problems ist²

$$\hat{\mu} = \pi + QP^T(PQP^T + \Omega)^{-1}(q - P\pi).$$

¹Im LR Modell wird $\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|A\beta - y\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1$ gelöst, das sich als restringiertes quadratisches Optimierungsproblem formulieren lässt. Seine Optimallösung kann jedoch nicht in geschlossener Form angegeben werden. Das LR Modell führt zu sogenannten dünn besetzten Optimallösungen bei denen viele der Koeffizienten β gleich Null sind.

²Der allgemeine Fall einer beliebigen Kovarianzmatrix Ω lässt sich mit Hilfe der Spektralzerlegung $\Omega = U\Lambda U^T$ von Ω auf den Fall (b) reduzieren. Dabei ist U eine orthogonale Matrix und Λ eine nicht-negative Diagonalmatrix. Mit Hilfe von U kann eine Variablentransformation durchgeführt werden, die eine Darstellung der Expertenmeinungen wie in (b) ermöglicht. Somit kann gezeigt werden, dass die Formel (1) auch im allgemeinen Fall gilt.