Optimierung in der Finanzmathematik SS 2020

1. Übungsblatt

1. Der Cash-Flow eines Unternehmens sieht für die nächsten acht Quartale folgendermaßen aus:

Quartal	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Geldfluss (in Tsd. Euro)	125	440	115	-500	-480	250	560	-810

Die Einnahmen (Ausgaben) sind als negative (positive) Einträge dargestellt. Das Unternehmen hat drei Finanzierungsmöglichkeiten.

- Ein Kredit mit Laufzeit zwei Jahre und $2,0\%$ Zinsen pro Quartal.
- Zwei andere Kredite mit Laufzeit 6 bzw. 9 Monate und Zinsen von $1,5\%$ bzw. $1,8\%$ pro Quartal. Diese zwei Kredite sind jeweils zum Quartalsbeginn verfügbar.

Die Rückzahlung der Kredite erfolgt am Ende der jeweiligen Laufzeit, während die Zinsen in jedem Quartal entrichtet werden.

Die Überschüsse können mit einem Zinssatz von $0,7\%$ pro Quartal investiert werden.

Es soll ein Finanzierungsplan ermittelt werden, der die Verpflichtungen stets erfüllt und das Vermögen des Unternehmens am Ende des Planungszeitraums maximiert.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP) und lösen Sie das LP mit einem Solver Ihrer Wahl.

(b) Führen Sie (unter Verwendung eines Solvers Ihrer Wahl) eine Sensitivitätsanalyse (SA) durch und bestimmen Sie alle hierzu relevanten Größen (vgl. Vorlesung). Beantworten Sie mit Hilfe der SA folgende Fragen.

(i) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 380 (statt 440). Wie würde dies das Vermögen des Unternehmens am Ende des Planungszeitraums beeinflussen?

(ii) Angenommen der Cash-Flow in Q3 ist 290 (statt 115). Kann die Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung des Vermögens am Ende des Planungszeitraums verwendet werden? Welche Schlüße werden daraus gezogen?

(iii) Einer der Lieferanten könnte sich die Verschiebung einer Zahlung über 50000 Euro von Q3 auf Q4 erlauben. Welcher wäre der faire Preis dieses Angebots?

2. Ein Pensionsfonds hat die untenstehenden Verpflichtungen (in Millionen von Euro) und möchte ein *zweckgebundenes Portfolio (dedicated portfolio)* aus Anleihen konstruieren. Dies ist ein sogenanntes *statisches* Portfolio, dessen Cashflow den gegebenen Verpflichtungen exakt entsprechen soll und bis zum Ende des Planungshorizonts nicht umgeschichtet wird. Also wird der Cashflow des Portfolios dazu verwendet um die Verpflichtungen zu bedienen, wobei nach der Aufstellung des Portfolios bis zum Ende des Zeithorizonts keine Aktien gekauft bzw. verkauft werden.

Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8
25	28	26	30	27	32	29	33

Folgende Anleihen mit Nominalwert von jeweils 100 Euro sind verfügbar:

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Preis	102,20	98,75	100,10	95,90	89,70	85,20	83,70	90,80	93,40
Coupon (jährlich)	5,625	4,35	4,75	5,25	4,00	5,00	5,25	5,75	5,95
Laufzeit (in Jahren)	1	2	2	3	3	4	5	5	5

Anleihe	10	11	12	13	14	15
Preis	107,30	109,40	107,90	105,10	102,60	97,10
Coupon	6,875	6,5	6,625	6,125	5,625	4,75
Laufzeit	6	6	7	7	8	8

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP), das die Kosten des zweckbestimmten Portfolios minimiert und lösen Sie das LP mit einem Solver ihrer Wahl.

(b) Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das „dedicated portfolio“ durch. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Angenommen die Verpflichtungen im dritten Jahr betragen 29×10^6 Euro. Um wie wieviel erhöhen sich die Kosten des zweckgebundenen Portfolios?

(ii) Gibt es Anleihen, die im optimalen Portfolio nicht vorhanden sind? Um wie viel sollte der Preis dieser Anleihen jeweils fallen, sodass sie im optimalen Portfolio aufgenommen werden?

(iii) Der Manager des Fonds möchte unbedingt 5000 Stück der vierten Anleihe in das zweckgebundene Portfolio aufnehmen. Welche Extrakosten verursacht eine entsprechende Entscheidung des Managements?

(iv) Würden Sie vermuten, dass gewisse Anleihen schlecht bepreist wurden? Welche? Warum?

(v) Unter welchen Bedingungen bzgl. Zinssatz am Geldmarkt sollte das optimale Portfolio eine Bargeldposition beziehen?

3. Eine Gemeinde muss folgende Verpflichtungen in den folgenden 9 Jahren berücksichtigen.

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Verpflichtungen	12000	18000	20000	18000	19000	15000	12000	9000	10000

Diese Verpflichtungen möchte sie mit Hilfe eines *zweckgebundenen Portfolios*[1] über folgende Anleihen mit Nominale jeweils 100 Euro, die zum aktuellen Zeitpunkt ($T_0 = 0$) zur Verfügung stehen, bedienen.

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Preis	101	100	102	99	97	104	101	102	103	98	104
Coupon (jährlich)	4,5	4	5	3,8	4	8,5	6,5	8	8,5	7	7,5
Laufzeit	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8	9

(a) Bestimmen Sie ein zweckgebundenes Portfolio mit minimalen Kosten, das zum Zeitpunkt T_0 zusammengestellt und in den folgenden 9 Jahren nicht umgeschichtet wird.

(b) Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für dieses Problem durch.

(i) Interpretieren Sie die *Schattenpreise* in Jahr t ($t = 1, 2, \ldots, 10$).

(ii) Interpretieren Sie die *reduzierten Kosten* von Anleihe i ($i = 1, 2, \ldots, 12$).

(iii) Interpretieren Sie die reduzierten Kosten der (eventuellen) Überschussvariablen z_t, ($t = 0, 1, \ldots, 10$).

4. (a) Berechnen Sie den Preis einer binären Call Option („digital call option“) mit Strikepreis 60 Euro und Fällingkeit T über ein Underlying XYZ, in Abhängigkeit des heutigen Preis S_0 des Underlyings XYZ, des Zinssatzes $r > 0$, und unter Berücksichtigung zweier Szenarien „up“ and „down“ für die Preisentwicklung des Basiswertes, in denen der Preis von XYZ zum Zeitpunkt T als $u \cdot S_0$ bzw. $d \cdot S_0$ gegeben ist, $d < 1 + r =: R < u$. Eine solche Call Option zahlt 1 Euro zurück, wenn zum Zeitpunkt T der Preis von XYZ den Ausübungspreis von 60 Euro überschreitet. Wenn der Preis von XYZ zum Zeitpunkt T unter 60 Euro fällt, dann zahlt die binäre Call Option nichts zurück.

[1] Das Konzept eines *zweckgebundenen Portfolios* wurde in Übungsbeispiel 2 erklärt

(b) Betrachten Sie zwei Europäische Call Optionen über den Basiswert XYZ. Seien die Ausübungspreise 60 bzw. 50 Euro und die aktuellen Preise 9 bzw. 12 Euro, wobei diese keine Arbitrage zulassen. Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro und der Zinssatz sei 0. Am Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt und d und u unbekannt sind. Welche Werte können u und d annehmen? Bestimmen Sie den fairen Preis einer Europäischen Put Option mit Ausübungspreis 45 Euro über XYZ.

(c) Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Seien 10, 7, 4 und 2 Euro die aktuellen Preise Europäischer Call Optionen über XYZ mit Ausübungspreisen 30, 40, 50 bzw. 60 Euro. Untersuchen Sie ob diese Preise eine Arbitrage ermöglichen und bestimmenn Sie gegebenefalls eine konkrete Arbitrage Möglichkeit. Um welche Art von Arbitrage handelt es sich hier? Bei welcher Option könnte eine falsche Bepreisung vorliegen? Begründen Sie Ihre Antworten.

(d) Lässt sich aus den Europäischen Call Optionen in c) ein Portfolio, das Typ A Arbitrage erlaubt, konstruieren?

5. **Arbitrage im Devisenmarkt.**
Ein Devisenmarkt heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Möglichkleit gibt, nur durch Devisenwechsel einen Gewinn zu machen. Geben Sie ein lineares Programm an, durch die Lösung dessen erkannt werden kann, ob das Devisenmarkt bestehend aus den vier Währungen USD, EUR, JPY und GBP arbitragefrei ist. Die aktuellen Wechselkurse zwsichen den oben genannten Währungen entnehmen Sie bitte `www.yahoofinance.com`. Ziehen Sie die Schlusskurse für den 1. April 2020 als Inputdaten heran. Der Input sollte eine 4×4 Matrix $A = (a_{ij})$ mit Einsern auf der Diagonale sein. Die Zeilen und die Spalten entsprechen jeweils den 4 Währungen. Der Eintrag a_{ij} auf der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entspricht dem Wechselkurs von i nach j, d.h. er stellt den Betrag in Währung i dar, den man für eine Einheit von Währung j bekommt. Lösen Sie das oben genannte lineare Programm und bestimmen Sie ob die obigen Wechselkurse eine Arbitragemöglichkeit zulassen[2]. Wiederholen Sie ihre Analyse mit den Schlusskursen vom 1. April 2019.

Um zu den gewunschten Daten zu gelangen klicken Sie auf `Markets`, und dann auf `Currencies` unter `www.yoahoofinance.com`. Dann wählen Sie den gewünschten Wechselkurs aus der Liste der Wechselkurse, klicken Sie auf `Historical Data`, wählen *Monthly* bei `Frequency` und „Apr 1, 2019 – Apr 1, 2020“ bei `Time period` und dann klicken Sie auf `Apply`. Die Tabelle mit diversen monatlichen Wechselkursen, darunter auch der Schlusskurs, erscheinen auf dem Bildschirm.

6. Angenommen einem Investor steht aktuell ein Budget von $B = 20000$ (Euro) zur Verfügung. Aktuell kostet die Aktie XYZ 25 Euro pro Stück und eine Europäische Call Option, 100 Stück dieser Aktie um 20 Euro in genau sechs Monaten von heute zu kaufen, kostet 1000 Euro. Es wird angenommen, dass der Investor zinsfrei zusätzliches Kapital beschaffen kann, um es unverzüglich in den Verkauf von Call Optionen mit den obigen Charakteristika zu investieren. Dabei darf die Anzahl der gekauften bzw. verkauften Call Optionen 50 nicht überschreiten. Weiters kann eine sechs-monatige risikolose Null-Coupon-Anleihe mit Nominale 100 zum aktuellen Zeitpunkt um 90 Euro gekauft werden. (Das ist ein Kontrakt, der in sechs Monaten 100 Euro auszahlt und heute um 90 Euro gekauft wird). Betrachten Sie drei aus heutiger Sicht gleichwahrscheinliche Szenarien für die Preisentwicklung der Aktie XYZ: der Preis ändert sich nicht, der Preis steigt auf 40 Euro, der Preis fällt auf 18 Euro.

(a) Formulieren und lösen Sie ein lineares Program um ein Portfolio bestehend aus Aktien, Anleihen und Optionen zu bestimmen, das den erwarteten Gewinn maximiert. (Der erwart eter Gewinn wird als erwarteter Wert des Portfolios in 6 Monaten abzüglich der Investitionskosten.)

(b) Angenommen der Investor möchte in jedem Preisentwicklungsszenario mindestens 2000 Euro gewinnen. Formulieren und lösen Sie ein lineares Programm, das den erwarteten Gewinn unter

[2] Es ist durchaus möglich, dass unterschiedliche Solver aufgrund unterschiedlicher nummerischer Genauigkeit unterschiedliche Ergebnisse liefern!

dieser zusätzlichen Restriktion maximiert. Vergleichen Sie die erwarteten Gewinne in (a) und (b). Sind das Ergebnis dieses Vergleichs intuitiv plausibel?

(c) Das Minimum der realisierten Gewinne über alle Szenarien heißt *risikoloser Gewinn*. Bestimmen Sie eine Portfoliozusammensetzung, die den risikolosen Gewinn für die oben genannten drei Szenarien maximiert. Vergleichen Sie dieses Portfolio mit den optimalen Portfolii aus (a) und (b) und diksutieren Sie über diesen Vergleich.

7. Ein (werdender) Hausbesitzer kann n unterschiedliche Hypothekarkredite mit jeweils fixem Zinsatz zur Finanzierung seines Hauses kombinieren. Sei $[T_0, T]$ der Zeithorizont: $T_0 = 0$ ist der aktuelle Zeitpunkt (an dem der Finanzierungsplan erstellt wird) und T ist der Zeitpunkt an dem die Rückzahlung des Hauses abgeschlossen sein sollte. Seien r_i, $T_i \leq T$, und b_i, der monatlicher Zinsatz, die Laufzeit, bzw. die maximale Höhe von Kredit i, $1 \leq i \leq n$. Die monatlichen Rückzahlungen von Kredit i müssen im Laufe der Zeit nicht konstant bleiben, es muss jedoch monatlich eine Mindestrückzahlung m_i, $1 \leq i \leq n$, geleistet werden. Weiters müssen die monatlichen Gesamtrückzahlungen im Laufe des gesamten Zeithorizonts konstant bleiben. Sei B der Finanzierungsbedarf und T die Gesamtlänge des zeitlichen Rückzahlungshorizonts (in Monaten). Der Hausbesitzer möchte einen Kreditfinanzierungsplan bestimmen, der seine monatlichen Rückzahlungen (oder - äquivalent - die Gesamtkosten der Kreditfinanzierung) minimiert. Es wird angenommen das der Hausbesitzer einen statischen Finanzierungsplan erstellen möchte, d.h. zum Beginn des Zeithorizonts wird endgültig entschieden welche Hypothekarkredite in welcher Höhe in Anspruch genommen werden, wobei davon ausgegangen wird, dass alle n möglichen Hypotherkarkredite zum Zeitpunkt T_0 und nur zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehen. Dannach darf die Entscheidung nicht mehr revidiert werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

8. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir berücksichtigen stets zwei Szenarien: a) es gibt keine oberen Schranken für die Anteile der Investition pro Aktie, und b) es gibt eine obere Investitionsschranke von 40% pro Aktie. Leerverkäufe (short selling) sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	1.10	0.93	0.62	0.74	-0.23	4.9
2		1.60	0.22	0.56	0.26	10.1
3			1.80	0.78	0.27	12.5
4				1.90	-0.56	8.9
5					2.20	14.7

(i) Formulieren Sie ein lineares Optimierungsproblem (LP) zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}^{(a)}$, $r_{\max}^{(b)}$ ins Szenario (a) bzw. (b). Welche Varianz haben die jeweils optimalen Portfolios für Szenarien (a) bzw. (b)?

(ii) Formulieren Sie ein quadratisches Optimierungsproblem (QP) zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP mit einem Solver Ihrer Wahl (zB. Matlab, R) und bestimmen Sie somit die minimale Portfoliovarianz für jedes der beiden Szenarien. Welchen erwarteten Ertrag $r_{\min}^{(a)}$, $r_{\min}^{(b)}$ hat das optimale Portfolio in Szenario (a) bzw. (b)?

(iii) Lösen Sie das Problem (1) (siehe unten) für Szenario (a) bzw. (b), für jeweils 20 unterschiedliche Werte r, die die Knoten eines uniformen Gitters auf $[r_{\min}^{(a)}, r_{\max}^{(a)}]$ bzw. $[r_{\min}^{(b)}, r_{\max}^{(b)}]$ darstellen. Sei $\mathcal{X}$ wird die Menge der zulässigen Portfolios im jeweiligen Szenario bezeichnet.

$$\begin{array}{cc} \min & x^T \Sigma x \\ udNB & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{1}$$

Stellen Sie die *Effizienzfronten* der beiden Szenarien graphisch dar und vergleichen bzw. interpretieren Sie die Ergebnisse. Zur Lösung der quadratischen Optimierungsoprobleme und für die graphische Visualisierung der Ergebnisse können Sie eine Software Ihrer Wahl verwenden (zB. Matlab, R).

9. Wir betrachten Portfolios bestehend aus fünf Positionen in Aktienindizes: `S&P 500`, `NASDAQ`, `DOW30`, `Nikkei225` und `Russell2000`. Das Portfoliogewicht von jedem Asset darf 0.30 nicht überschreiten, die Summe der Portfoliogewichte muss 1 betragen und *Leerverkäufe* (*short selling*) sind nicht erlaubt. Als Inputdaten sollen die adjustierten wöchentlichen Schlusskurse der fünf Positionen (`adjClose`[3]) für den Zeitraum Jänner 2011-Dezember 2019 dienen; diese Daten können etwa aus `finance.yahoo.com` heruntergeladen werden.

   (a) Berechnen Sie den minimalen erwarteten Ertrag r_{min} und den maximalen erwarteten Ertrag r_{max} der oben genannten Portfolios. Bestimmen Sie für diese Portfolios die Effizienzfront in dem Sie auf das Intervall $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$ ein uniformes Gitter mit 21 Knoten (19 innere Knoten) legen und für jeden Gitterpunkt eine Instanz des MVO Problems lösen (d.h. das *mean-variance problem* (1), vgl. Vorlesung), wobei der zu erreichende erwartete Ertrag r dem jeweiligen Gitterpunkt entspricht. Führen Sie diese Berechnungen jeweils zweimal durch: als empirischer Schätzer für den erwarteten monatlichen Ertrag eines Assets soll einmal das arithmetische Mittel und das andere Mal das geometrische Mittel der entsprechenden Zeitreihe dienen. Vergleichen Sie die Effizienzfronten in den beiden Berechnungsmodi.

   (b) Formulieren Sie das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem als quadratisches Optimierungsproblem und lösen Sie es unter der Annahme, dass der risikoloser Ertrag 0.01% beträgt. Seien r_{SR} und σ_{SR} der erwartete Ertrag bzw. die Varianz des Portfolios, das das Sharpe-Ratio maximiert. Überzeugen Sie sich anhand einer graphischen Darstellung, dass die Kapitalallokationslinie (CAL), die durch den Punkt $(\mu_{\text{SR}}, \sigma_{\text{SR}})$ verläuft, tatsächlich eine Tangente der Effizienzfront darstellt. Auch hier sollen die Berechnungen zweimal durchgeführt werden, jeweils einmal mit dem arithmetischen und geometrischen Mittel als Schätzer für die erwarteten monatlichen (relativen) Erträge der einzelnen Assets. Vergleichen Sie die Ergebnisse in den beiden Berechnungsmodi.

[3] Das sind bzgl. Dividende und Splits adjustierte Schlusskurse