Sei x ein zulässiges Portfolio, $x \in \mathcal{X}$

Def Das Sharpe-Ratio von x ist der Quotient

$$\frac{\mu^t x - r_f}{\sqrt{x^t \Sigma x}} =: h(x)$$

wobei μ der erwateter Vektor der Assetrendite,

Σ die Kovarianzmatrix der Assetrendite und

r_f der risikolose Ertrag sind.

W.F. Sharpe, The Sharpe ratio, Journal of Portfolio Management 21(1), 1994, 49-58.

Es ist erstrebenswert $h(x)$ zu maximieren;
$h(x)$ kann als erwarteter Ertrag über den risikolosen Ertrag hinaus pro Einheit des Risikos (gemessen als Varianz des Portfolioertrags)

Das Sharpe-Ratio-Maximierungsproblem:

$$\max \frac{\mu^t x - r_f}{\sqrt{x^t \Sigma x}} \qquad (SHRP)$$

udNB $x \in \mathcal{X}$

wobei $\mathcal{X}$ die Menge der zulässigen Portfolios darstellt.
Die optimale Lösung von SHRP heißt auch "optimal risky portfolio"

und stellt graphisch jenen Punkt der Pareto-Front dar, an dem

die Tangente aus dem risikolosen Portfolio die Pareto-Front berührt.

In der obigen Formulierung ist SHRP nicht leicht lösbar;
man kann es aber in ein äquivalentes konvexes quadr. minim. Problem zurückführen, wenn folgende Annahmen

9 getroffen werden:

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \; \forall x \in X$ b) $\exists \hat{x} \in X$ mit $\mu^t \hat{x} > r_f$

Anmerkung: b) ist eine sinnvolle Annahme, denn wenn in X kein (riskanten) PF mit einem erwarteten Ertrag größer als r_f gibt, dann hat es überhaupt keinen Sinn über X zu optimieren.

Beweis von Satz 1 (Nummerierung aus den Folien)

Wir betrachten eine Menge X von zulässigen PF, sodass a) b) erfüllt sind und zeigen, dass eine Opt.lösung von SHRP als Optimallösung des folgenden Problems bestimmt werden kann

$$\begin{aligned} \min \quad & y^t \Sigma y \\ & (y, k) \in X^+ \qquad\qquad (SHRP') \\ & (\mu - r_f \cdot e)^t y = 1 \end{aligned}$$

Wobei $e = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$ und

$$X^+ := \left\{ (y, k) \in \mathbb{R}^{n+1} : k > 0 \; \frac{y}{k} \in X \right\} \cup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n+1}} \right\}.$$

Weiters zeigen wir: Falls (y^*, k^*) eine Opt.lösung von (SHRP') dann is $\frac{y^*}{k^*}$ eine Optimallösung von (SHRP) und vice-versa.

Anmerkung Als konvexes quadratisches Minimierungsproblem ist (SHRP') mit Standardmethoden lösbar.

⇒) Sei $x \in \mathcal{X}$ eine zulässige Lösung von SHRP für die $\mu^t x > r_f$ gilt (Existenz folgt aus Annahme 6)

(Die Optimallösung von SHRP wird klarerweise eine Lösung sein die Annahme 6 erfüllt)

Setze $k := \frac{1}{\mu^t x - r_f} = \frac{1}{(\mu - r_f e)^t x}$ und $y = k \cdot x$

Dann gilt

(i) $\sqrt{x^t \Sigma x} = \frac{1}{k}\sqrt{y^t \Sigma y}$ und somit

$$(*) \quad \frac{\mu^t x - r_f}{\sqrt{x^t \Sigma x}} = \frac{\mu^t x - r_f}{\frac{1}{k}\sqrt{y^t \Sigma x}} = \frac{\cancel{\frac{1}{k}}}{\cancel{\frac{1}{k}}\sqrt{y^t \Sigma x}} = \frac{1}{\sqrt{y^t \Sigma x}}$$

(ii) $(y,k) \in \mathcal{X}^+$ (da $\frac{y}{k} = x \in \mathcal{X}$ und $k = \mu^t x - r_f > 0$)

Somit gilt für ~~die~~ eine Optimallösung x^* von SHRP

$$OPT := \frac{\mu^t x^* - r_f}{\sqrt{x^{*t} \Sigma x^*}} = \frac{1}{y^{*t} \Sigma y^*} \le \frac{1}{OPT'} \quad \text{wobei } y^* = k^* x^*, \; k^* = \mu^t x^* - r_f$$

und OPT' ist der opt. Zielfunktionswert von SHRP'

Also gilt $\boxed{OPT \le \frac{1}{OPT'} \quad (1)}$

⇐ Sei nun (y^*, k^*) eine Opt. Lösung von SHRP'

Es ist klar dass $k^* > 0$ sonst hätten wir $(y^*, k^*) = 0$ was aufgrund der Restriktion $(\mu - r_f e)^t y = 1$ unzulässig für SHRP' wäre.

Setze $x^* = \frac{y^*}{k}$. Man kann leicht überprüfen, dass die Gleichungen $(*)$ gelten. Weiters ist $x^* \in \mathcal{X}$ (aufgrund der Definition von $\mathcal{X}^+$)

11

Somit haben wir

$$OPT' = \sqrt{y^{*t}\Sigma y^{*}} = \frac{\sqrt{x^{*t}\Sigma x^{*}}}{\mu^{t}x^{*}-r_f} \geq \frac{1}{OPT}$$

$$\Rightarrow \boxed{OPT \geq \frac{1}{OPT'} \quad (2)}$$ (weil beide OPT und OPT' positiv sind)

Die Ungleichungen (1) und (2) implizieren

$$OPT = \frac{1}{OPT'}$$

Und somit ist (y^*, k^*) mit $y^* := k^* x^*$ und $k^* = \mu^t x^* - r_f$ eine Opt. Lösung von SHRP' falls x^* eine Opt. Lösung von SHRP und vice-versa. ∎