

Beweis Proposition 1 (Skizze)

(1)

Zu zeigen $\forall \sigma \geq 0, x^{(1*)}(\sigma^2)$ optimale Lösung von $P_1(\sigma^2)$

$\exists r \geq 0$ und $\exists p \geq 0$ sodass $x^{(1*)}(\sigma^2)$

~~ist~~ auch eine Opt. Lösung für $P_2(r)$ und $P_3(p)$

ist. Analoge Aussagen ausgehen von $x^{(2*)}(\tau)$

und $x^{(3*)}(p)$.

Setze $r := \mu^t x^{(1*)}(\sigma^2)$ und löse $P_2(r)$.

Falls $x^{(1*)}(\sigma^2)$ keine Opt. Lösung für dieses $P_2(r)$,

dann $\exists y \in X$ mit $\mu^t y \geq r$ und

$$y^t \Sigma y < x^{(1*)}(\sigma^2)^t \Sigma x^{(1*)}(\sigma^2) \quad (*)$$

Dann gilt aber (*) überall in einer Nachbarschaft $B_{\frac{1}{n}}(y, \varepsilon)$ von y und es lässt sich ein $\bar{y} \in B_{\frac{1}{n}}(y, \varepsilon)$ mit $\mu^t \bar{y} > \mu^t y \geq r$ finden.

Dieses \bar{y} ist nun eine bessere Lösung für $P_1(\sigma^2)$ als $x^{(1*)}(\sigma^2)$ \Downarrow Widerspruch!

Die anderen Fälle und Implikationen lassen sich ähnlich beweisen \square

Beweis von Proposition 2

(2)

$$P_2(r) \quad \min_{u, v \in \mathbb{R}^n} x^t \Sigma x$$

$\mu^t x \geq r$
 $x \in X$ } lineare Restriktionen

Sie bilden also ein Polyeder in \mathbb{R}^n .

(*) Mit $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ und $x_i \geq 0, t_i \geq 0$ ist P beschrieben.

P ist auch abgeschlossen $\Rightarrow P$ ist kompakt.

Die quadratische Form $x^t \Sigma x$ ist eine stetige Funktion \Rightarrow nimmt ihr Minimum über P an.

Im allgemeinen Fall wenn die Kompaktheit von P nicht wie in (*) gezeigt werden kann, folgt die Existenz der Optimallösung aus der Konvexität der Zielfunktion, die nun bewiesen wird.

Behauptung: $\Sigma \succeq 0 \Rightarrow x^t \Sigma x$ ist konvex
(pos. semidef.)
 $\Sigma \succ 0 \Rightarrow x^t \Sigma x$ ist strikt konvex.
(pos. def.)

Beweis der Behauptung:

Σ symmetrisch und reell $\xrightarrow{\text{Spektralsatz}}$ Σ ist orthogonal diagonalisierbar, d.h. \exists Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix S ,

$$\text{so dass } \Sigma = S D S^t \quad \text{mit } D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$d_{ii} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ oder $d_{ii} > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ wenn $\Sigma \succeq 0$ (pos. def.)

Dann gilt $x^t \Sigma x = x^t S D S^t x = (S^t x)^t D (S^t x)$

Betrachte

$$f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f_1(x) := x^t D x = \sum_{i=1}^n d_{ii} x_i^2$$

Betrachte weiter $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = f_1(S^t x)$.
 $x \mapsto x^t \Sigma x$ (3)

Da $x \mapsto x^2$ (strikt) konvex, ist auch $x \mapsto d_{ii} x^2$ (strikt) konvex

(falls $d_{ii} > 0$). $\Rightarrow f_1$ ist konvex falls $d_{ii} > 0, \forall i \in \overline{1, n}$
(Σ pos. semidef.)
 und f_1 ist strikt konvex falls $d_{ii} > 0, \forall i \in \overline{1, n}$, also

falls Σ pos. def.

Nun folgt aus ^{oder (strikt)} Konvexität von f_1 die ^(strikt) Konvexität von f :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= f_1(S^t(\alpha x + (1-\alpha)y)) \\ &= f_1(\alpha(S^t x) + (1-\alpha)(S^t y)) \leq \alpha f_1(S^t x) + (1-\alpha) f_1(S^t y) \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \end{aligned}$$



Beweis von Proposition 3

$\Sigma \geq 0$ $v_m := \min \{ \mu^t x : x \in X \}$

$v_M := \max \{ \mu^t x : x \in X \}$

$f: [v_m, v_M] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$r \mapsto f(r) = \sqrt{x^{(2*)t}(r) \Sigma x^{(2*)}(r)}$ ist konvex, weil f_1 konvex!

Bezeichne $x^{(r)} := x^{(2*)}(r)$ somit $f(r) = \sqrt{x^{(r)t} \Sigma x^{(r)}}$

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $f(r) = f_1(x^{(r)})$, $\forall r$
 $x \mapsto \sqrt{x^t \Sigma x}$

Da $\Sigma = SDS^t$ mit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$ (wie im Beweis von Prop. 2)

und $d_{ii} > 0, \forall i \in \overline{1, n}$ (oder $d_{ii} > 0, \forall i \in \overline{1, n}$)

$$\text{gilt } f_1(x) = \sqrt{x^t \Sigma x} = \sqrt{x^t S D S^t x} \quad (4)$$

$$= \sqrt{x^t S \sqrt{D} \sqrt{D} S^t x} = \sqrt{(\sqrt{D} S^t x)^t (\sqrt{D} S^t x)} = \|\sqrt{D} S^t x\|$$

$$\text{wobei } \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Beobachtung ①: f_1 ist konvex:

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) = \|\sqrt{D} S^t(\alpha x + (1-\alpha)y)\|$$

$$= \|\alpha \sqrt{D} S^t x + (1-\alpha) \sqrt{D} S^t y\| \leq \alpha \|\sqrt{D} S^t x\| + (1-\alpha) \|\sqrt{D} S^t y\|$$

$$= \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_1(y)$$

Beobachtung ② $\forall \alpha \in [0, 1] \quad \forall r_1, r_2 \in [v_{\min}, v_{\max}]$

$\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)}$ ist zulässig für $P_2(r)$

mit $r = \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2$.

Beträchtlich $\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)} \in X$ weil X konvexes Polyeder und $x^{(r_1)}, x^{(r_2)} \in X$.

$$\text{Weiters } \mu^t (\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)}) = \alpha \mu^t x^{(r_1)} + (1-\alpha) \mu^t x^{(r_2)}$$

$$\geq \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2 = r$$

Beobachtung ③

$$\left(x^{\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2} \right)^t \Sigma x^{\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2}$$

$$(*) \leq \left(\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)} \right)^t \Sigma \left(\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)} \right)$$

weil $x^{\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2}$ optimal und $\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha) x^{(r_2)}$

Zulässig für $P_2(r)$

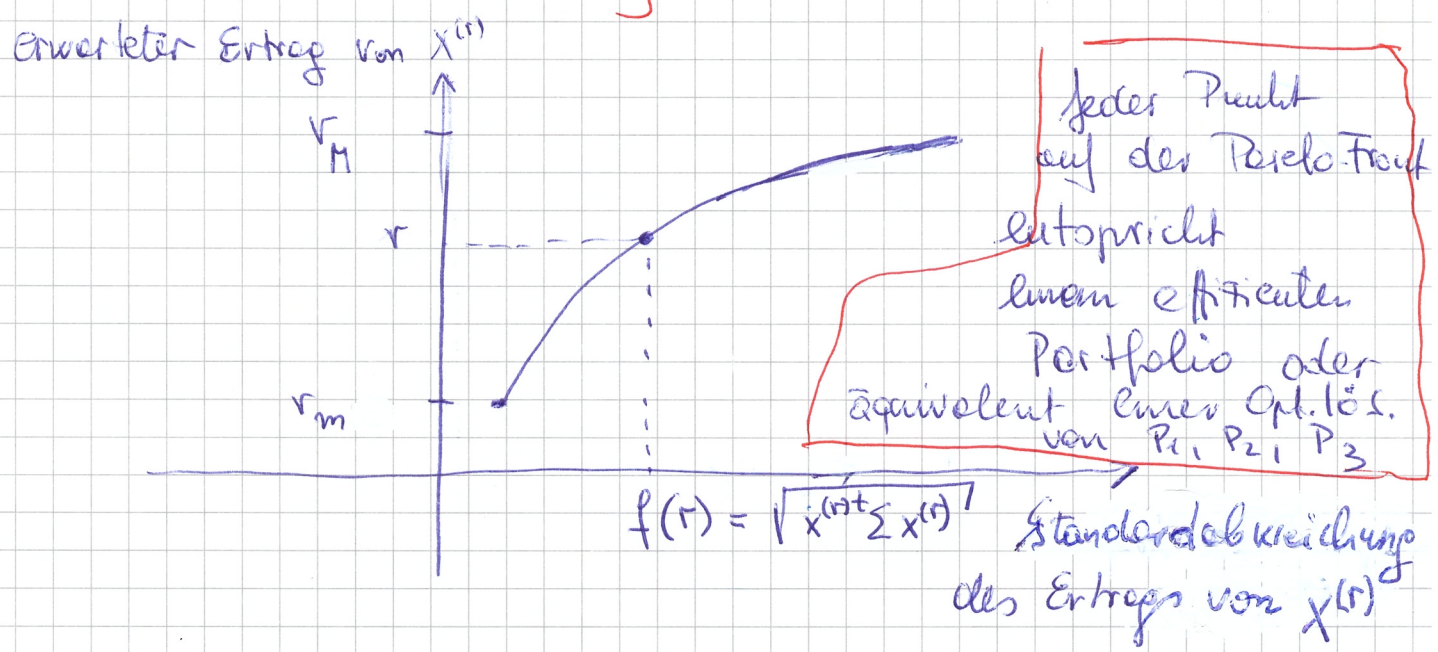
Da $y \rightarrow \sqrt{y}$ mon. steigend (logos & tritel) für $y > 0$ erhalten wir aus (*):

$$\begin{aligned}
 \underline{f(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2)} &= \sqrt{\left(\alpha x^{(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2)} \right)^t \sum x^{(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2)}} \\
 &\leq \sqrt{\left(\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha)x^{(r_2)} \right)^t \sum \left(\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha)x^{(r_2)} \right)} \\
 &= f_1 \left(\alpha x^{(r_1)} + (1-\alpha)x^{(r_2)} \right) \stackrel{\text{Beobachtung (1)}}{\leq} \alpha f_1(x^{(r_1)}) + (1-\alpha)f_1(x^{(r_2)}) \\
 &= \underline{\alpha f(r_1) + (1-\alpha)f(r_2)} \quad \text{und dies vervollständigt}
 \end{aligned}$$

den Beweis.



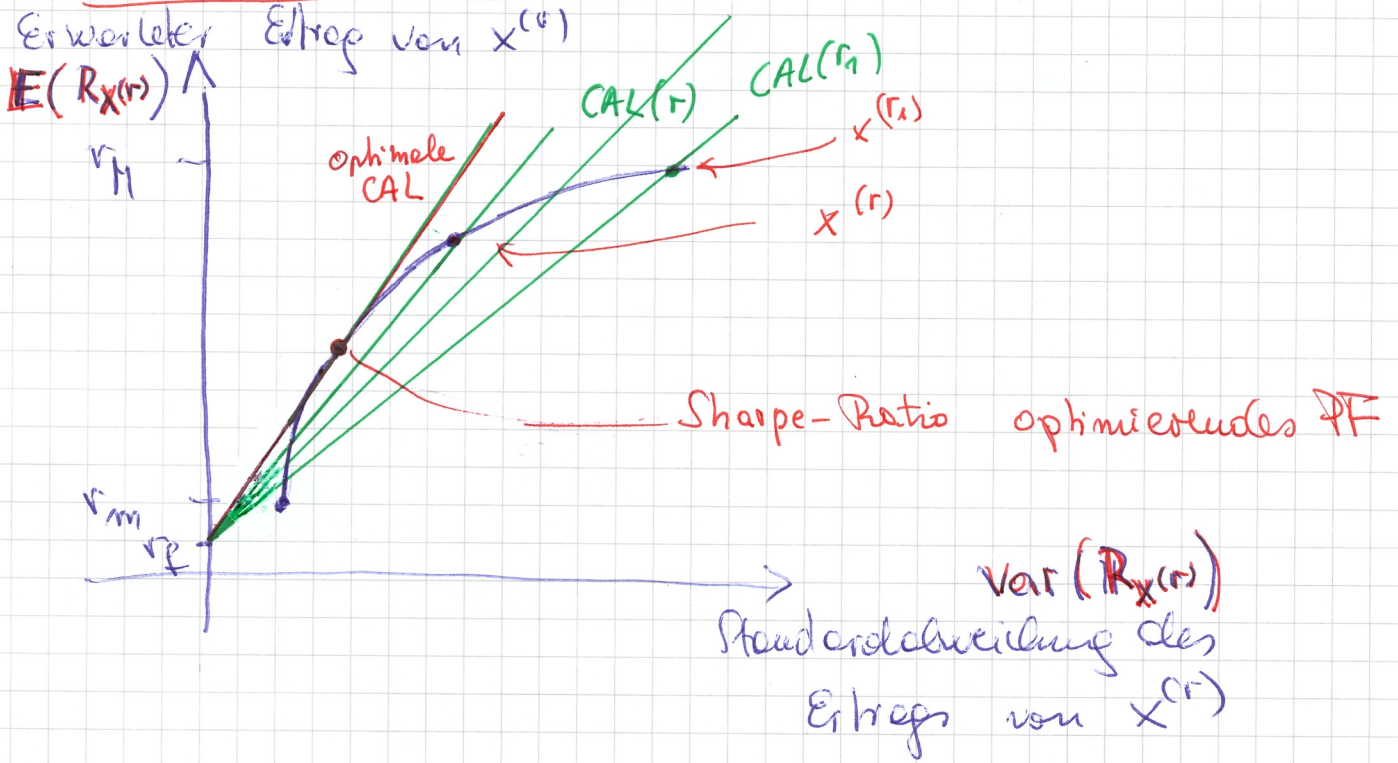
Graphische Darstellung der Pareto-Front



Frage: Welches Pf auf der Pareto-Front ist das geeignetste für einen bestimmten Investor?

Das hängt von der Risiko-Aversion bzw. Risiko-Affinität des Investors ab (β -Risiko-Aversionsfaktor)

Die Kapitalallokationslinie



Sei r_f der risikolose Ertrag
 und $x^{(f)} = (x_0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein risikoloses
 PF, das nur auf die risikolose Aktie investiert.
 $x^{(f)}$ liegt auf der y-Achse in der Graphik (kein Risiko!)
 Sei $x^{(r)}$ ein effizientes risikoloses PF mit $r \in [r_M, r_M]$

Annahme: $r_f < r_M$ (ein riskantes PF soll

einen höheren erwarteten Ertrag als ein risikoloses PF haben)

Bilde eine konvex Kombination von $x^{(f)}$ und $x^{(r)}$

$\forall \alpha \in [0, 1]$ sei $x^{(\alpha)} := \alpha x^{(f)} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ x^{(r)} \end{pmatrix}$

Ertrag (erwarteter) von $x^{(\alpha)}$:

$$(r_f \mu)^T (\alpha x^{(f)} + (1-\alpha) (0, x^{(r)})) = \alpha r_f + (1-\alpha) \mu^T x^{(r)}$$

$$\alpha r_f + (1-\alpha) E(R_{x^{(r)}}) = \alpha r_f + (1-\alpha) r \quad (\text{weil } x^{(r)} \text{ effizient})$$

Standardabweichung des Ertrags von $x^{(\alpha)}$:

(7)

$$\sqrt{(1-\alpha)x_1^{(r)}, \dots, (1-\alpha)x_n^{(r)}} \sum_1^1 \begin{pmatrix} \alpha \\ (1-\alpha)x_1^{(r)} \\ \vdots \\ (1-\alpha)x_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

wobei $\sum_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \Sigma & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

$$= (1-\alpha) \sqrt{x_1^{(r)T} \Sigma x_1^{(r)}} = (1-\alpha) \sqrt{\text{var}(R_{x^{(r)}})}$$

Die Punkte $\left((1-\alpha) \sqrt{\text{var}(R_{x^{(r)}})} \mid \alpha r_f + (1-\alpha) E(R_{x^{(r)}}) \right)$

für $\alpha \in [0, 1]$ bilden ein Geradenstück ~~in~~ der Ebene mit Koordinatensystem $\left(\sqrt{\text{var}(R_{x^{(r)}})}, E(R_{x^{(r)}}) \right)$, für $r \geq 0$.

Dieses Geradenstück ist eine Kapitalallokationslinie die dem effizienten PF $x^{(r)}$ zugeordnet wird (AL(r)).

Steigung

$$\frac{E(R_{x^{(r)}}) - r_f}{\text{var}(R_{x^{(r)}})^{1/2}} = \frac{E(R_{x^{(r)}}) - r_f}{\text{var}(R_{x^{(r)}})}$$

Sharpe-Ratio von PF $x^{(r)}$

Unter allen CAL hat die Tangente die maximale Steigung; diese entspricht dem PF mit maximalem Sharpe-Ratio