Kapitel 3: Quadratische Optimierungsmodelle (QO): Portfolio Optimierung

Seien $S_1, \ldots, S_n$ Assets (Wertpapiere) und $[t_0, t_1]$ ein Zeitintervall, t_0 ist der aktuelle Zeitpunkt

R_i : Rendite von Asset S_i in $[t_0, t_1]$, for $i \in \overline{1, n}$ (Zufallsvariable)
$\mu_i := \mathbb{E}(R_i)$: Erwartungswert von R_i, for $i \in \overline{1, n}$

$\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$: der erwarteter Renditenvektor,

σ_i^2 : Varianz von R_i, for $i \in \overline{1, n}$

$\Sigma = (\sigma_{ij})$: die Kovarianzmatrix von $(R_1, \ldots, R_n)$ mit $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$, for $i \in \overline{1, n}$

Portfolio $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, x_i : Anteil des in Asset S_i investierten Kapitals, for $i \in \overline{1, n}$

R_x : Rendite des PF x in $[t_0, t_1]$, $R_x = \sum_{i=1} x_i R_i$

Die erwartete PF-Rendite: $\mathbb{E}(R_x) = \mu^t x$

Die Portfoliovarianz: $var(R_x) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j = x^t \Sigma x$

Beobachtung: $var(R_x) = x^t \Sigma x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \Sigma$ is pos. semidefinit

$\mathcal{X}$: Menge von zulässigen Portfolios, $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax = b, Cx \geq d\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^k$, $k, m \in \mathbb{N}$.

Das Markowitz'sche Portfolio Optimierungsmodell
(**Mean-Variance-Optimization (MVO)**)

$$P_1(\sigma^2): \qquad \max\left\{\mu^t x \colon x\Sigma x \leq \sigma^2, x \in \mathcal{X}\right\},$$

wobei σ^2 ein Steuerungsparameter ist.

Annahme: Σ ist positiv definit (es gibt keine redundante, abhängige Assets im PF)

Anmerkung: Übliche Restriktionen sind $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ (normiertes PF) und $x_i \geq 0$, for $i \in \overline{1,n}$ (long-only PF)

Definition 1.

Ein PF $x \in \mathcal{X}$ heißt **(Pareto) effizient** *wenn es kein $y \in \mathcal{X}$ gibt, sodass $\mathbb{E}(R_y) \geq \mathbb{E}(R_x)$, $var(R_y) \leq var(R_x)$ gelten und mindest eine der zwei Ungleichungen strikt erfüllt ist. Für ein gegebenes Asset-Universum $\mathcal{X}$ heißt die Menge aller effizienten Portfolios* **Pareto-Front** *in $\mathcal{X}$.*

Für jedes $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ sei $x^{(1*)}(\sigma^2)$ eine Optimallösung von $P_1(\sigma^2)$ (falls eine solche existiert). Dann ist $\{x^{(1*)}(\sigma^2) \colon \sigma^2 \geq 0\}$ die Pareto-Front in $\mathcal{X}$.

Kapitel 3: Äquivalente Formulierung der MVO

$$P_2(r): \quad \min\left\{x\Sigma x\colon \mu^t x \geq r\,, x \in \mathcal{X}\right\}, \text{ mit Steuerungsparameter } r \geq 0$$

$$P_3(\rho): \quad \max\left\{\mu^t x - \frac{\rho}{2} x^t \Sigma x\colon x \in \mathcal{X}\right\}, \text{ mit Steuerungsparameter } \rho \geq 0$$

$\forall r \in \mathbb{R}_+$ sei $x^{(2*)}(r)$ eine Optimallösung von $P_2(r)$ und $\forall \rho \in \mathbb{R}_+$ sei $x^{(3*)}(\rho)$ eine Optimallösung von $P_3(\rho)$ (falls diese Lösungen existieren).

Proposition 1.

Es gilt $\{x^{(1*)}(\sigma^2)\colon \sigma^2 \geq 0\} = \{x^{(2*)}(r)\colon r \geq 0\} = \{x^{(3*)}(\rho)\colon \rho \geq 0\}$.

Proposition 2.

Fall Σ positiv definit und $P_2(r)$ zulässig, dann besitzt $P_2(r)$ eine eindeutige Optimallösungm, für $r \geq 0$.

Proposition 3.

Sei Σ positiv semidefinit. Seien $r_m := \min\{\mu^t x\colon x \in \mathcal{X}\}$ und $r_M := \max\{\mu^t x\colon x \in \mathcal{X}\}$. Die Funktion $f\colon [r_m, r_M] \to \mathbb{R}_+$ with $r \mapsto f(r) := \sqrt{x^{(2*)}(r)^t \Sigma x^{(2*)}(r)}$ is konvex.

Kapitel 3: MVO: Praktische Aspekte

Die Koeffizieten μ und Σ der MVO sind zum aktuellen Zeitpunkt nicht bekannt und müssen geschätzt werden (ökonometrische Modelle und Zeitreihenanalyse).

Die simplesten (historisch basierten) Schätzer:

k Zeitpunkte $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ in der Vergangenheit, $k \in \mathbb{N}$

$P_{i,j}$: Preis (oder totale Rendite) von Asset i zum Zeitpunkt t_j, $j \in \overline{0,k}$

$R_{ij} := \frac{P_{ij} - P_{i,j-1}}{P_{i,j-1}}$ die realisierte relative Rendite von Asset i im Zeitintervall $[t_{j-1}, t_j]$, für $j \in \overline{1,k}$, $i \in \overline{1,n}$

$\hat{\mu}_i := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} R_{ij}$: arithmetisches Mittel als Schätzer für μ_i, für $i \in \overline{1,n}$

$\bar{\mu}_i := \left(\Pi_{j=1}^{k} (1 + R_{ij}) \right)^{1/k} - 1$: geometrisches Mittel als Schätzer für μ_i, für $i \in \overline{1,n}$

$\hat{\sigma}_{ij} := \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} (R_{il} - \hat{\mu}_i)(R_{jl} - \hat{\mu}_j)$: Schätzer der Kovarianz der Rendite der Assets i und j, $i,j \in \overline{1,n}$

Kapitel 3: MVO: Kritikpunkte

- Die optimalen Lösungen von MVO sind i.A. **nicht gut diversifiziert**, Schätzfehler führen zur überproportionalen Investitionen in Assets mit falsch geschätzten hohen Renditen

  Steuerungsmechanismen gegen mangelnde Diversifikation:

  (i) obere Investitionsgrenzen für einzelne Assets oder Assetklassen

  (ii) Schätzung mit Hilfe der sogenannten Asset-betas
  $R_l^{(m)}$, $R_l^{(f)}$: Rendite des Markts bzw. des risikofreien Assets zum Zeitpunkt l, für $l \in \overline{1,k}$

  Lineare Regression $R_{il} - R_l^{(f)} = \beta_i(R_l^{(m)} - R_l^{(f)}) + \epsilon_{il}$, wobei der Vektor ϵ_i das idiosynkratische Risiko von Asset S_i darstellt.
  Annahme $cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$

  Dann gilt $\hat{\mu}_i - \mathbb{E}(R^{(f)}) := \beta_i(\mathbb{E}(R^{(m)}) - \mathbb{E}(R^{(f)}))$ und
  $\hat{\sigma}_{ij} := \beta_i\beta_j(\sigma^{(m)})^2$, $\hat{\sigma}_{ii} = \beta_i^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$, für $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$.

Kapitel 3: MVO: Kritikpunkte

- Die optimale Lösung des MVO ist **sehr sensitiv** gegenüber kleinen Veränderungen der Koeffizienten des Problems, insbesondere μ

  Robuste Optimierung, Black-Litterman Ansatz

- **Transaktionskosten** werden in MVO nicht berücksichtigt

  $x^{(0)}$: aktuelles Portfolio, x : das neue zu konstruierende Portfolio

  Führe zusätzliche Variablen y_i, z_i, $i \in \overline{1,n}$, sowie eine obere Grenze h für die Abweichung zwischen $x^{(0)}$ und x als Parameter (turnover rate) ein.

  Führe zusätzliche Restriktionen zu $P_2(r)$ ein:

  $x_i - x_i^{(0)} \le y_i$, $x_i^{(0)} - x_i \le z_i$, $\sum_{i=1}^n (z_i + y_i) \le h$, $y_i, z_i \ge 0$

  Geänderte Restriktion : $\sum_{i=1}^n (\mu_i x_i - t_i y_i - t_i' z_i) \ge r$, where t_i, t_i' sind die Ankaufs- und Verkaufskosten pro Aktie und Kapitaleinheit.

Kapitel 3: Die Kapitalallokationslinie und das Sharpe-Ratio

Sei r_f der risikolose Ertrag und $x^{(r)} := x^{(2*)}(r)$ die Optimallösung von $P_2(r)$ für $r \in [r_m, r_M]$. Sei $x^{(f)} = (x_0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein risikoloses PF. Betrachte eine konvexe Kombination $x^{(\alpha)} := \alpha x^{(f)} + (1-\alpha)\left(0, x^{(r)}\right)^t$ von $x^{(f)}$ und $x^{(r)}$, für $\alpha \in [0,1]$

Es gilt $\mathbb{E}(R_{x^{(\alpha)}}) = \alpha r^{(f)} + (1-\alpha)r = \alpha r^{(f)} + (1-\alpha)\mathbb{E}(R_{x^{(r)}})$ und $\sqrt{var(R_{x^{(\alpha)}})} = (1-\alpha)\sqrt{var(R_{x^{(r)}})}$.

Somit ist $\left(\sqrt{var(R_{x^{(\alpha)}})}, \mathbb{E}(R_{x^{(\alpha)}})\right)$, $\alpha \in [0,1]$ ein Geradenstück in der Ebene mit dem Koordinatenysystem $\left(\sqrt{var(R_x)}, \mathbb{E}(R_x)\right)$.

Die entsprechende Gerade heißt **Kapitalallokationslinie** bzgl. $x^{(r)}$ (CAL(r)). Die Steigung von CAL(r) heißt Sharpe ration von $x^{(r)}$:

$$\frac{\mathbb{E}(R_{x^{(r)}}) - r_f}{\sqrt{var(R_{x^{(r)}})}}$$

CAL(r) mit der maximalen Steigung heißt optimale Kapitalallokationslinie.

Beobachtung: CAL(r) ist optimal wenn sie tangent zur Pareto-Front verläuft.

Kapitel 3: Das Sharpe-Ratio Maximierungsproblem

$$\text{(ShRP)} \qquad \max\left\{\frac{\mu^t x - r_f}{\sqrt{x^t \Sigma x}} : x \in \mathcal{X}\right\}$$

Satz 1.

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ die Menge der zulässigen Portfolios, sodass $\forall x \in \mathcal{X}$, $\sum_{i=1}^n x = 1$ gilt. Es existiere weiters $\hat{x} \in \mathcal{X}$ mit $\mu^t \hat{x} > r_f$. Dann lässt sich das Portfolio mit maximalem Sharpe-Ratio in $\mathcal{X}$ als Lösung des folgenden konvexen quadratischen Optimierungsproblems bestimmen:

$$\textit{(ShRP')} \qquad \min\left\{y^t \Sigma y \colon (y,k) \in \mathcal{X}^+, (\mu - r_f e)^t y = 1\right\},$$

wobei $\mathcal{X}^+ := \{(y,k) \colon k > 0, y/k \in \mathcal{X}\} \cup \{(0,0,\ldots,0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $e = (1,1,\ldots,1)^t \in \mathbb{R}$.
(y^*, k^*) is eine Optimallösung von (ShRP') dann und nur dann, wenn $x^* = \frac{y^*}{k^*}$ eine Optimallösung von (ShRP) ist.