3 (QO): Portfolio Optimierung – das durchschnittliche absolute Abweichung als Risikomaß

Seien $S_1, \ldots, S_n$ Assets (Wertpapiere) und $[t_0, t_1]$ ein Zeitintervall, t_0 ist der aktuelle Zeitpunkt

R_i : Rendite von Asset S_i in $[t_0, t_1]$, for $i \in \overline{1, n}$ (Zufallsvariable)
$\mu_i := \mathbb{E}(R_i)$, $\forall i \in \overline{1, n}$ $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$

$\Sigma = (\sigma_{ij})$: die Kovarianzmatrix von $(R_1, \ldots, R_n)$

Portfolio $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, x_i

Min-Var-Optimierung (MVO): $\min\left\{x^t \Sigma x \colon \mu^t x \geq r\,, x \in \mathcal{X}\right\}$

Das Risiko des PF wird anhand der Varianz σ_x der PF-Rendite $R_x = \sum_{i=1} R_i x_i$ modelliert, $\sigma_x := \sqrt{\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i)^2]}$

Alternatives Risikomaß: die durchschnitztliche absolute Abweichung w_x/n mit $w_x := \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i|]$.

Min-Abs.-Abweichung (MAD): $\min\left\{w_x \colon \mu^t x \geq r\,, x \in \mathcal{X}\right\}$

3 (QO): Portfolio Optimierung – das durchschnittliche absolute Abweichung als Risikomaß

Satz 2.

(Konno und Yamazaki 1991)
Seien alle Notationen wie oben definiert und sei $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ *multivariat normalverteilt. Dann gilt* $w_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_x$ *für jedes Portfolio* x*.*

H. Konno and H. Yamazaki, Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market, *Management Science* **37(5)**, 1991, 519–531.

Anmerkungem:

- MAD kann als lineares Optimierungsproblem geschrieben werden (vorausgesetzt $\mathcal{X}$ ist ein Polyeder).
- Im Fall vormalverteilten Assetrenditen sind die Portfolio Optmierungsmodelle MVO und MAD äquivalent. d.h. die jeweiligen optimalen Portfolio stimmen überein.

3 (QO): Ertrag-basierte Investitionsanalyse

Betrachte die Rendite R_t eines (Investmentfonds über T Perioden, $1 \leq t \leq T$.

Sei F_{it} der Ertrag des i-ten Faktors in Periode t, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq t \leq T$.

Seien w_i die Gewichte der einzelnen Faktoren im Fond und ϵ_t der zustzliche faktorunabhängige Ertrag, der durch das aktive Management des Fonds, entsteht:

$$F_t = \sum_{i=1} w_i F_{it} + \epsilon_t \,, \text{ für alle } t \in \overline{1,\, T}$$

Das Optimierungsporblem: $$\min \left\{ var(\epsilon_t) \colon w \in \mathbb{R}^n_+ \,, \sum_{i=1} w_t = 1 \right\}$$

W.F. Sharpe, Asset allocattion: Management style and performance mmeasurements, *Journal of Portfolio Managment*, 1992, 7–19

Anmmerkung: Das obige Problem ist ein konvex-quadratisches Optimierungsproblem und kann mit entsprechenden Standardverfahren gelöst werden.

3 (QO): Das Black-Litterman Modell

F. Black and R. Litterman, Global portfolio optimization, *Financial Analysts Journal* **48(5)**, 1992, 28–43.

Ziel: Berücksichtigung der Unsicherheit der herkömmlichen, zB. aus Zeitreihenanylysen stammenden Schätzer von $\mu = \mathbb{E}(\mathbb{E}(R_1, \ldots, R_n)$.

Es wird eine a priori Verteilung $\mu \sim N_n(\pi, \tau\Sigma)$ mit $\tau \ll 1$ angenommen.
π wird zB. aus Zeitreihenanalysen oder auf dem CAPM basierend geschätzt;
Σ ist die Kovarianzmatrix von $R_1, \ldots, R_n)$ und wird mit Hilfe von Zeitreihenanalysen geschätzt.

Idee: Berücksichtigung von zusätzlichen Restriktionen der Form $P\mu = v$ für gegebene $P \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $v \in \mathbb{R}^k$ zB. *Expertenmeinungen*).

Die Expertenmeinungen werden als unsichere Daten betrachtet: die Realisierungen von v werden als Zufallsgröße V mit $V = P\mu + \epsilon$ gesehen;

3 (QO): Das Black-Litterman Modell

Annahmen: μ und ϵ sind unabhängig, $\epsilon \sim N_k(0, \Omega)$, Ω ist eine Diagonalmatrix

Dann gilt $V|\mu \sim N_k(P\mu, \Omega)$ (bedingte Verteilung von V) und $V \sim N_k(P\pi, \tau P \Sigma P^t + \Omega)$ (unbedingte Verteilung von V)

Üblicher Ansatzt: $\Omega = cP\Sigma P^t$, wobei der Steuerungsparameter c das Konfidenzniveau an den Expertenmeinungen darstellt ($c = 0$ bedeutet 100-prozentiges Vertrauen).

Die Bayes'sche Schätztheorie liefert die a posteriori Verteilung von $\mu|V = v \sim N_n(\mu_{BL}, \Sigma_{BL})$ mit

$$\mu_{BL} = \mathbb{E}(\mu|V = v) = \pi + \tau \Sigma P^t (\tau P \Sigma P^t + \Omega)^{-1} (v - P\pi)$$

$$\Sigma_{BL} = var(\mu|V = v) = \tau\Sigma - \tau^2 \Sigma P^t (\tau P \Sigma P^t + \Omega)^{-1} P \Sigma$$