# Kapitel 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - kombinatorische Auktionen

**Input:** Eine Menge $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ von Objekten (zB. Kontrakten), die versteigert werden.

Eine Menge $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ von $n$ Angeboten, wobei $\forall j \in \overline{1, n}$, $B_j := (S_j, p_j)$ mit $S_j \subseteq M$ eine Teilmenge von Objekten und $p_j$ dem angebotenen Ankaufspreis.

**Output:** Eine Wahl von Angeboten seitens des Auktionärs, die seinen Umsatz maximiert.

## Modell

Entscheidungsvariablen: $\forall j \in \overline{1, n}$, $x_j \in \{0, 1\}$ mit $x_j = 1$ dann und nur dann, wenn Angebot $j$ angenommen wird. Sei $x := (x_j)_{j \in \overline{1,n}} \in \{0, 1\}^n$.

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j p_j : x \in \{0,1\}^n, \sum_{j:\ i \in S_j} x_j \leq 1, \forall i \in \overline{1, m} \right\}$$

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - kombinatorische Auktionen

**Verallgemeinerung**: Es können mehrere Exemplare, zB. $u_i$, pro Objekt $i \in \overline{1,m}$ vorhanden sein;

$B_j := (\lambda_1^{(j)}, \ldots, \lambda_m^{(j)}, p_j)$ mit Anzahl $\lambda_i^{(j)}$ von Exemplaren des $i$-ten Objekts in Angebot $j$

**Modell:**

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j p_j : x \in \{0,1\}^n \,, \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^{(j)} x_j \leq u_i \,, \forall i \in \overline{1,m} \right\}$$

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - das Schließfachproblem

**Das Problem:**
Eine Firma erhält Einzahlungen (Schecks, Überweisungen) aus $n$ unterschiedlichen Regionen. Die Einzahlungen landen in Schließfächern und müssen dort behandelt werden bevor das Geld tatsächlich verfügbar wird. Es gibt $m$ Standortkandidaten zur Errichtung von maximal $q$ Schließfächern; das Betreiben eines Schließfachs in Standort $j$ ist mit Fixkosten $f_j$ verbunden, $j \in \overline{1, m}$.
Jedes Schließfach kann Einzahlungen von unterschiedlichen Regionen bearbeiten und jede Region muss einem bearbeitenden Schließfach zugeordnet werden. Jede Paarung (Region $i$, Schließfach $j$ ) ist mit bekannten Kosten $a_{ij}$ verbunden, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$.

**Frage**: Welche Schließfächer sollen errichtet werden, sodass die Behandlung aller Einzahlungen minimale Kosten verursacht.

**Modell:**
Entscheidungsvariablen: $\forall j \in \overline{1, m}$, $y_j \in \{0, 1\}$ mit $y_j = 1$ dann und nur dann, wenn in Standort $j$ ein Schließfach errichtet wird.
$\forall i \in \overline{1, n}$, $\forall i \in \overline{1, m}$, $x_{i,j} \in \{0, 1\}$ mit $x_{i,j} = 1$ dann und nur dann, wenn Region $i$ Standort $j$ zugeordnet wird.

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - das Schließfachproblem

$$
\begin{array}{rl}
\min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} f_j y_j \\
u.d.Nb. &
\end{array}
$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \leq q$$

$$x_{ij} \leq y_j, \ i \in \overline{1, n}, \ j \in \overline{1, m}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \ i \in \overline{1, n}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ i \in \overline{1, n}, \ j \in \overline{1, m}$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \ j \in \overline{1, m}$$

# 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - Konstruktion eines Index Fonds

**Aktives Portfoliomanagment:** die Performance wird mit Hilfe technischer und fundamentaler Analyse bzw. mit Hilfe von Prognosemodellen erzeugt.

**Passives Portfoliomanagment:** funktioniert ohne Prognosen, Diversifizierung als Performance Quelle
Zwei Strategien des passiven Portfoliomanagment:
**(a)** „Buy-and-hold“ und **(b)** Indexing

Ziel in (b): Konstruktion eines Portfolios, dass die Entwicklung eines breiten Markts oder Maktsegments nachahmt, keine Versuche schlecht bepreiste Wertpapiere zu entdecken.
**Beispiel**: Index Fonds.

Aus $n$ Assets im Markt werden $q < n$ Assets gesucht; damit wird ein Portfolio gebildet, dass das Verhalten des Markts so gut wie möglich nachahmt.

**Für Index Fonds spricht**:
die Markteffizienz, die empirische Performance, die Vermeidung von Trsnsaktionskosten ...

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - Konstruktion eines Index Fonds

**Pure Indexing:** Auswahl eines breiten Markt Index zB. S&P500; Ankauf aller Positionen mit dem gleichen Gewicht wie im Index.

Dieses Ansatz ist nicht praktisch: viele kleine Positionen lassen die Managementkosten sehr schnell in die Höhe steigen.
Wünschenswert: eine geringe Anzahl $q$ von Assets im Fonds mit $q \ll n$.

**Input:** Anzahl $n$ der Assets am Markt, Anzahl $q$ der im Fonds vertretenen Assets, $\rho_{ij}$ Ähnlichkeitsmaß für die Assets $i$ und $j$, $i, j \in \overline{1, n}$.
**Output:** Ein Portfolio mit möglichst großer Gesamtähnlichkeit zu den Assets am Markt.

**Modell:**
Entscheidungsvariablen: $\forall j \in \overline{1, m}$, $y_j \in \{0, 1\}$ mit $y_j = 1$ dann und nur dann, wenn Asset $j$ in Fonds vertreten ist.
$\forall i, j \in \overline{1, n}$, $x_{i,j} \in \{0, 1\}$ mit $x_{i,j} = 1$ dann und nur dann, wenn Asset $i$ durch Asset $j$ im Fonds vertreten wird.

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - Konstruktion eines Index Fonds

$$
\begin{array}{rl}
\max & \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_{ij} x_{ij} \\
u.d.Nb. & \\
& \sum_{j=1}^{m} y_j \leq q \\
& x_{ij} \leq y_j,\ \ i,j \in \overline{1,n} \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,\ \ i \in \overline{1,n} \\
& x_{ij} \in \{0,1\},\ \ i,j \in \overline{1,n} \\
& y_j \in \{0,1\},\ \ j \in \overline{1,m}
\end{array}
$$

Sei $y^*$, $x^*$ eine Optimallösung des Problems.

**Die Gewichte der Assets im Fonds:**
$\forall j \in \overline{1,n}$, $w_j := \sum_{i=1}^{n} V_i x_{ij}^* / \sum_{i=1}^{n} V_i$, wobei $V_i$ der Marktwert von Asset $i$ ist.

## 4: Gemischtganzzahlige lineare Optimierungsmodelle (MILP) - weitere Ganzzahligkeitsrestriktionen

- Beschränkte Anzahl von Assets in einem Portofio

  (zB. höchstens $k$ Assets in Portfolio bei einem Universum von $n$ Assets)

  Gewicht des $i$-ten Assets: $x_i \in \mathbb{R}$

  Präsenz des $i$-ten Assets: $y_i \in \{0, 1\}$

  For all $i \in \overline{1, n}$, $x_i \leq y_i$, $\sum_{i=1} y_i \leq k$.

- Untere und obere Schranken $l_i$ bzw. $u_i$ für das Gewicht des $i$-ten Assets

  for all $i \in \overline{1, n}$, $l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i$.

- Logische Restriktionen bzw. Cluster-Bildung

  Wenn in Asset $i$ investiert wird, muss auch (darf nicht) in Asset $j$ investiert werden: $y_i \leq y_j$ $(y_i \leq 1 - y_j)$

  Es soll in genau ein Asset aus einer Menge $I$ von Assets investiert werden: $\sum_{i \in I} y_i = 1$

  Wenn in Asset $i$ investiert wird, dann muss es in mindestens einem der Assets $j$ und $k$ investiert werden: $y_i \leq y_j + y_k$