Anhang MILP

Die Umformungen zu den Gomory cuts

$$\sum_{j\in J} a_j x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j = b \qquad (*)$$

sei $f_0 := b - \lfloor b \rfloor \in (0,1)$

$\forall j \in J,\ f_j := a_j - \lfloor a_j \rfloor \in [0,1]$ } setze in (*) ein

$$\sum_{j\in J} (f_j + \lfloor a_j \rfloor) x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j = f_0 + \lfloor b \rfloor$$

$$\sum_{j\in J} f_j x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j = f_0 + \lfloor b \rfloor - \sum_{j\in J} \lfloor a_j \rfloor x_j$$

$$\sum_{\substack{j\in J:\\ f_j\le f_0}} f_j x_j + \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j > f_0}} f_j x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j = f_0 + \lfloor b \rfloor - \sum_{j\in J} \lfloor a_j \rfloor x_j$$

$$\sum_{\substack{j\in J:\\ f_j\le f_0}} f_j x_j + \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j > f_0}} (f_j - 1) x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j = f_0 + \underbrace{\lfloor b \rfloor - \sum_{j\in J} \lfloor a_j \rfloor x_j - \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j > f_0}} x_j}_{k}$$

$k \in \mathbb{Z}$, $\forall x$ zulässig für MILP

$\Rightarrow k \le -1$ oder $k \ge 0$

(a) $k \le -1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{\substack{j\in J:\\ f_j\le f_0}} f_j x_j + \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j > f_0}} (f_j - 1) x_j + \sum_{j\notin J} a_j x_j \le f_0 - 1$

Anhang

$$-\sum_{\substack{j\in J:\\ f_j\le f_0}} \frac{f_j}{1-f_0} x_j + \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j>f_0}} \frac{1-f_j}{1-f_0} x_j - \sum_{j\notin J} \frac{a_j}{1-f_0} \geq 1 \qquad (*')$$

$$(\bullet\bullet)\ K\geq 0 \Rightarrow \sum_{\substack{j\in J\\ f_j\le f_0}} \frac{f_j}{f_0} x_j - \sum_{\substack{j\in J\\ f_j > f_0}} \frac{1-f_j}{f_0} x_j + \sum_{j\notin J} \frac{a_j}{f_0} x_j \geq 1 \qquad (*'')$$

Sei e_j, d_j der Koeffizienten neben x_j in $(*')$ bzw. $(*'')$:

Also gilt $\sum_j e_j x_j \geq 1$ oder $\sum_j d_j x_j \geq 1$

$$\Longrightarrow \sum_j \max\{e_j, d_j\} x_j \geq 1$$

$\forall j\in J,\ f_j > f_0$: $\quad \underline{e_j = \frac{1-f_j}{1-f_0} > 0} \quad d_j = \frac{f_j-1}{f_0} < 0$

$\forall j\in J,\ f_j\le f_0$: $\quad e_j = -\frac{f_j}{1-f_0} \leq 0 \quad \underline{d_j = \frac{f_j}{f_0} \geq 0}$

$\forall j\notin J \quad a_j > 0$: $\quad -\frac{a_j}{1-f_0} < 0 \quad \underline{\frac{a_j}{f_0} > 0}$

$\forall j\in J \quad a_j < 0$: $\quad \underline{-\frac{a_j}{1-f_0} > 0} \quad \frac{a_j}{f_0} < 0$

So we get
$$\sum_{\substack{j\in J:\\ f_j\le f_0}} -\frac{f_j}{1-f_0} x_j + \sum_{\substack{j\in J:\\ f_j>f_0}} \frac{1-f_j}{1-f_0} x_j + \sum_{\substack{j\notin J\\ a_j>0}} \frac{a_j}{f_0} x_j - \sum_{\substack{j\notin J\\ a_j<0}} \frac{a_j}{1-f_0} \geq 1 \qquad (**)$$

Anhang

mit Basislösung $x_1 = 1.5, x_2 = 3.5, x_3 = x_4 = 0$ und ZF-Wert = 5. Nun erzeugen wir den Gomory Schnitt zur Restriktion $x_1 - 0.2x_3 + 0.1x_4 = 1.5$.

$f_0 = 0.5 \quad f_1 = f_2 = 0 \quad a_3 = -0.2 \quad a_4 = 0.1$

Mit der Formel (**) erhalten wir

$$\frac{0.2}{1-0.5}x_3 + \frac{0.1}{0.5}x_4 \geq 1 \iff 2x_3 + x_4 \geq 5 \quad (***)$$

Mit Hilfe von $x_3 = 2 + x_1 - x_2$ und $x_4 = 19 - x_1 - 2x_2$

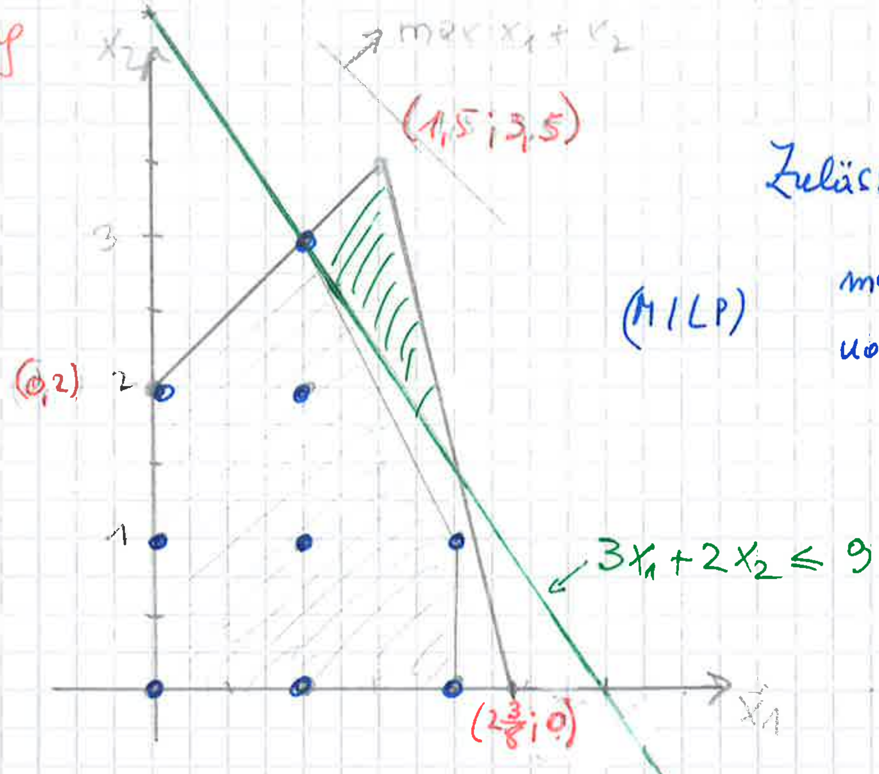
erhalten wir aus (***)

$$3x_1 + 2x_2 \leq 9$$

und die verbesserte LR:

$$(LR') \qquad \begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & \boxed{3x_1 + 2x_2 \leq 9} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Die optimale Lösung von LR' ist $x_1 = 1, x_2 = 3$ mit ZF-Wert 4; diese Lösung ist zulässig für das ursprüngliche MILP und somit auch optimal dafür.



Zulässige Menge für MILP

(MILP)

$$\max \quad x_1 + x_2$$

udNb

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$8x_1 + 2x_2 \leq 19$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Gomory Schnitt: $3x_1 + 2x_2 \leq 9$

Es gibt keine ganzzahligen Lösungen im abgeschnittenen Bereich 

Zulässige Menge der linearen Relaxation ~~nach~~ dem ersten Schnitt stimmt nicht mit der konvexen Hülle der ganzzahligen Lösungen 

Man kann zeigen, dass dies nach endlich vielen Gomory Schnitten der Fall; im Allgemeinen werden dann exponentiell viele Schnitte benötigt (siehe auch A. Schrijver, On cutting planes, in Combinatorics 79, Part II, Annals of Discrete Mathematics 9, North Holland, Amsterdam 1980, pp. 291–296)