Die KKT-Bedingungen für das Markowitzsche Portfolio Optimierungsproblem (MVO), ein konvex-quadratisches Minimierungsproblem

1

$$(MVO)\quad \min \frac{1}{2} x^t \Sigma x \quad \text{udNB} \quad \begin{aligned} \mu^t x &\geq r & (\lambda_r) \\ Ax &= b & (\gamma_E) \\ Cx &\geq d & (\gamma_I) \end{aligned}$$

Lagrange Multiplikatoren

wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. semi) definit, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$

Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu^t x \geq r,\ Ax = b,\ Cx \geq d\}$ die Menge der zulässigen Lösungen.

Es gilt nun $f(x) := \frac{1}{2} x^t \Sigma x$ und $\nabla f(x) = \Sigma x$, und f 2mal stetig differenzierbar

$g_0(x) = \mu^t x$, $\nabla g_0(x) = \mu$, g_0 2 mal diff.,

$\forall i \in E = \overline{1,m}$, $g_i(x) := A_{(i,)} x - b_i$, $\nabla g_i(x) = (A_{i\cdot})^t$, 2 mal diff.,

$\forall j \in \overline{1,p} =: \mathcal{J}$ $g_j(x) := C_{(j,\cdot)} x - d_j$, $\nabla g_j(x) = (A_{j,\cdot})^t$, 2 mal diff.,

und $\mathcal{J} := \overline{0,p}$

Sei $x^* \in X$ ein regulärer Punkt, d.h. die Vektoren $A^t_{(i,\cdot)}$, $C^t_{(j,\cdot)}$ für $j \in \overline{1,p}$ mit $C_{(j,\cdot)} x^* = d_j$, sowie μ falls $\mu^t x^* = r$, sind linear unabhängig.

Die notwendigen Bedingung erster Ordnung:

Es existieren die Lagrange Multiplikatoren $\lambda_r \in \mathbb{R}$, $\gamma_E \in \mathbb{R}^m$, und $\gamma_I \in \mathbb{R}^p$, sodass

$$(1)\quad \nabla f(x^*) - \sum_{i \in E} (\gamma_E)_i \nabla g_i(x^*) - \sum_{j \in \mathcal{J}\setminus\{0\}} (\gamma_I)_j \nabla g_j(x^*) - \lambda_r g_0(x^*) = 0,$$

(2) $\lambda_r \geq 0$, $\gamma_I \geq 0$ und (3) $(\lambda_I)_j \; g_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in J = \overline{0,p}$ 2

Nun setzen wir die konkreten Gradienten ein und erhalten in Vektor-Matrix-Darstellung:

$$\nabla g_i = (A_{(i\cdot)})^t$$

(1) $\Sigma x^* - \lambda_r \mu - A^t \gamma_E - C^t \gamma_I = 0$

(2) $\lambda_r \geq 0$, $\gamma_I \geq 0$ (3) $(Cx^* - d)^t \gamma_I = 0$, $\lambda_r (\mu^t x^* - r) = 0$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung:

(4) $N^t(x^*) \Big[\underbrace{\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i \in E} (\gamma_E)_i \nabla^2 g_i(x^*) - \sum_{j \in J \setminus \{0\}} (\gamma_I)_j \nabla^2 g_j(x^*) - \lambda_r \nabla^2 g_0(x^*)}_{\Sigma} \Big] N(x^*)$ pos. semidefinit

wobei $N(x^*)$ eine Basis des Kerns der Abbildung $x \to A(x^*) x$ ist mit $A(x^*)$ Jacobi-Matrix von den Restriktionen mit Indizes $E \cup J_1$ wobei $J_1 \subseteq J = \overline{0,p}$ die von x^* mit Gleichheit erfüllt werden.

Konkret gilt $\forall x^* \in X$, $\nabla^2 g_i(x^*) = 0 \quad \forall i \in E = \overline{1,m}$, $\nabla^2 g_j(x^*) = 0$, $\forall j \in J = \overline{0,p}$ weil die Restriktionen linear sind.

Weiters gilt $\nabla^2 f(x^*) = \Sigma$, $\forall x^* \in X$.

Also lautet (4) $N^t(x^*) \Sigma N(x^*)$ pos. semidef für einen bestimmten ~~Vektor~~ Matrix $N(x^*)$.

Da $\Sigma \geq 0$ ist $u^t \Sigma u \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, also ist diese Bedingung immer erfüllt.

$$\underbrace{(u^t N^t(x^*))}_{u_1^t} \Sigma \underbrace{(N(x^*) u)}_{u_1} \geq 0$$

Die hinreichenden Bedingungen 2. Grades

Annahme: Σ positiv definit (keine restr. Ann.)

Denn ist $N^t(x^*) \Sigma N(x^*)$ pos. def. weil pos. semidef und $u^t (N^t(x^*) \Sigma N(x^*)) u = 0 \Rightarrow \underbrace{(u^t N^t(x^*))}_{u_1^t} \Sigma \underbrace{(N(x^*) u)}_{u_1} = 0 \Rightarrow$

$u' : -N'(x^*) u = 0 \Rightarrow u = 0$ weil $N(x^*)$ die 3

Basis eines gewissen Unterraums und daher aus lin. unabhängigen Vektoren besteht.

Nun ist die verfeinerte Bedingung. (4) obsolet (unter der Annahme Σ_1 pos. def.)

---

(5) $g_j(x^*) = 0, \; j \in J = \overline{0,p} \Rightarrow \lambda_r > 0$ für $j = 0$

$(\gamma_I)_j > 0$ für $j > 0$

Nun nehmen wir weiter an, dass A, C vollen Rang haben d.h. sie haben keine lin. abhängige Zeilen (die kann man im Vorfeld eliminieren). Dann sind alle konstanten Gradienten $\nabla g_j, j \in \overline{1,p}$ und $\nabla g_i, \; i \in \overline{1,h}$, linear unabhängig.

Analog kann angenommen werden, dass μ^t l. unabh. von den Vektorkoeff. der anderen Restriktionen ist. Somit wäre jeder Punkt ein regulärer Punkt.

Zusammenfassend: unter der Annahme der lin. Unabhängigkeit aller Restriktionen des Problems und Σ' pos. def ist $x \in X$ ein (lok.) Minimum des MVO dann und nur dann wenn die Lagrange Multiplikatoren $\lambda_r \geq 0, \; \gamma_E \in \mathbb{R}^m, \; \gamma_I \in \mathbb{R}_p^+$ existieren, sodass

$$\Sigma' x - \lambda_r \mu - A^t \gamma_E - C^t \gamma_I = 0 \qquad (*)$$

und $(Cx - d)^t \gamma_I = 0$ (a) $\quad \lambda_r (\mu^t x - r) = 0$ (b) $\quad (**)$

und

$$\left.\begin{array}{ll} C_{j\cdot} x - d_j = 0 \Rightarrow (\gamma_I)_j > 0 & (a) \\ \mu^t x - r = 0 \Rightarrow \lambda_r > 0. & (b) \end{array}\right\} (***)$$

Dazu 2 Anmerkungen (1) Für Σ pos. def. ist die Zielfkt. strikt konvex $\Rightarrow$ es gibt ein eindeutiges lok. Min, das auch ein glob. Min. ist.

(2) Bei prakt. Problemen ist $\mu^t x - r = 0$ für eine Optimallösung immer erfüllt (weil sonst kann man x modifizieren, dass die Lösung weiterhin zulässig bleibt und das Risiko verringert wird). Also sind (** b) und (*** b) obsolet in diesem Fall.

Somit gilt: Für das MVO mit Σ pos. def. sind die notwendigen Bedingungen ersten Grades plus ~~zusätzliche~~ Komplementaritäts Bedingung auch hinreichend für das globale Optimum.