Entdeckung von Arbitrage mit Hilfe der linearen Optimierung (LO)

Satz 1 stellt ein Beispiel für diesen Ansatz dar:
endlich viele Szenarien, endlich viele beliebige Assets

Ein weiteres Beispiel mit anderen Annahmen wie folgt:

(i) ein Kontinuum von Preisentwicklungszenarien,

(ii) das Asset-Universum besteht aus Derivaten über denselben (beliebigen) Basiswert,

(iii) Der Payoff jedes Derivats ist stückweise linear

Notationen: $[t_0, t_1]$: Zeitintervall mit aktuellem Zeitpunkt t_0,

S_0: bekannter (deterministischer) Preis des Basiswerts zum aktuellen Zeitpunkt t_0,

S_1: Preis des Basiswerts zum zukünftigen Zeitpunkt t_1, Zufallsvariable,

$i \in \overline{1, n}$: das i-te Derivat i mit Fälligkeit t_1, $i \in \overline{1, n}$,

$S_0^{(i)}$: Preis des Derivat i, $i \in \overline{1, n}$, zum Zeitpunkt t_0,

ψ_i: stückweise lineare Payoff-Funktion von Derivat i zum Zeitpunkt t_1 (abhängig von S_1), für alle $i \in \overline{1, n}$

Entdeckung von Arbitrage mit Hilfe der linearen Optimierung (LO)

Vereinfachende Annahme: $\forall i$ hat ψ_i nur einen Knickpunkt K_i.

Europäische Call oder Put Optionen (ECO, EPO) über einen bestimmten Basiswert erfüllen diese Annahmen.

Betrachte ein Portfolio x mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bestehend aus x_i Stück von Derivat i, $i \in \overline{1, n}$.

Der Payoff von x abhängig vom Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt t_1:

$$\psi^{(x)}(S_1) := \sum_{i=1}^{n} \psi_i(S_1) x_i$$

Die Kosten von x zum Zeitpunkt t_0: $\sum_{i=1}^{n} S_0^{(i)} x_i$

Frage: Unter welche Bedingungen gibt es eine (statische) Arbitrage-Möglichkeit in den Preisen $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$?

Entdeckung von Arbitrage mit Hilfe der linearen Optimierung (LO)

Konstruiere ein zum Zeitpunkt t_0 kostengünstigstes Portfolio x^*, das für jeden zukünftigen Preis S_1 des Basiswertes einen nicht-negativen Payoff aufweist:

$$x^* \in argmin\Big\{ \sum_{i=1}^{n} S_0^{(i)} x_i \colon x \in \mathbb{R}^n,\ \psi^{(x)}(S_1) \geq 0,\ \forall S_1 \in [0,\infty) \Big\}.$$

Arbitrage von Typ A $\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} S_0^{(i)} x_i^* < 0$

Anmerkung: $\psi^{(x)}$ ist stückweise linear und hat höchstens n Knickpunkte K_i, $i \in \overline{1,n}$. Es gelte o.B.d.A. $K_1 < K_2 < \ldots < K_n$.

Somit gilt $\psi^{(x)}(S_1) \geq 0$, $\forall S_1 \in [0,\infty)$, dann und nur dann, wenn

(i) $\psi^{(x)}(0) \geq 0$,

(ii) $\psi^{(x)}(K_i) \geq 0$, für $i \in \overline{1,n}$,

(iii) $(\psi^{(x)}(K_n))'_+ \geq 0$ (rechte Ableitung an der Stelle K_n).

Weiters gilt $(\psi(K_n)^{(x)})'_+ = \sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(K_n+1) - \psi_i(K_n)\big) x_i$.

Entdeckung von Arbitrage mit Hilfe der linearen Optimierung (LO)

Bestimme ein kostengünstigstes Portfolio x^* durch die Lösung des LP

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} S_0^{(i)} x_i \\ u.d.Nb. & \\ & \sum_{i=}^{n} \psi_i(0) x_i \geq 0 \\ & \sum_{i=}^{n} \psi_i(K_j) x_i \geq 0\,,\ \forall 1 \leq j \leq n \\ & \sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(K_n+1) - \psi_i(K_n)\big) x_i \geq 0 \end{array}$$

Proposition 4.

Es gibt keine Arbitrage vom Typ A in den Preisen $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1,n}$, dann und nur dann, wenn der optimale Zielfunktionswert des obigen LP gleich Null ist.

Proposition 5.

Angenommen es gibt keine Arbitrage vom Typ A in den Preisen $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1,n}$. Dann gibt es in diesen Preisen auch keine Arbitrage vom Typ B dann und nur dann, wenn das Duale des obigen LP eine strikt positive Optimallösung besitzt.

Entdeckung von Arbitrage mit Hilfe der linearen Optimierung (LO)

Spezialfall: Die Derivate sind ECO mit Ausübungspreis K_i, $i \in \overline{1,n}$.
D.h. $\psi_i(S) = (S - K_i)^+ := \max\{S - K_i, 0\}$, für alle $i \in \overline{1,n}$.
Sei $S_0 := \left(S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, \ldots, S_0^{(n)}\right)^t \in \mathbb{R}$.
Ein kostengünstigstes Portfolio x^* ist eine Optimallösung von $\min\{S_0^t x \colon Ax \geq 0\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} K_2 - K_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ K_3 - K_1 & K_3 - K_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_n - K_1 & K_n - K_2 & K_n - K_3 & \ldots & K_n - K_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Duale zum obigen LP

$$max\{\mathbf{0}y \colon A^t y = S_0\,,\, y \geq 0\}\,,$$

wobei $y \in \mathbb{R}^n$ die Dualvariablen sind. $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ist der Nullvektor.

Entdeckung von Arbitrage für ein ECO Portfolio

Satz 6.

Seien $0 < K_1 < K_2 < \ldots < K_n$ die Ausübungspreise von n Europäischen Call Optionen (ECO) mit gleicher Fälligkeit t_1, alle geschrieben über denselben (beliebigen) Basiswert. Sei $S_0^{(i)}$ der Preis der ECO mit Ausübungspreis K_i, $i \in \overline{1, n}$, zum Emissionszeitpunkt t_0, $t_0 < t_1$. In den Preisen $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$, gibt es keine Arbitrage dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $S_0^{(i)} > 0$, *für alle* $i \in \overline{1, n}$,

(ii) $S_0^{(i)} > S_0^{(i+1)}$, *für alle* $i \in \overline{1, n-1}$,

(iii) *Die stückweise lineare Funktion* $C \colon [K_1, K_n] \to \mathbb{R}$, *die durch* $C(K_i) := S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$, *definiert wird, ist strikt konvex.*