Dynamische Optimierung

(1) Das Rucksackproblem $KP(W; v_1, \dots, v_n; w_1, \dots, w_n)$

Input: n Objekte, $n \in \mathbb{N}$, und deren
Nutzen $v_i \geq 0$, $i \in \overline{1,n}$
Gewichte $w_i \geq 0$, $i \in \overline{1,n}$
Eine Gewichtsobergrenze oder Kapazität W.

Output: Eine Teilmenge von Objekten mit Gesamtgewicht $\leq W$ und maximalem Gesamtnutzen

Lösungsansatz 1: Formulierung als MILP und Lösung mit den bereits diskutierten Verfahren (Branch & Bound, Branch & Cut, ~~Heuristiken~~) MILP $\max \{ \sum_{i=1}^{n} v_i x_i : \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W, x_i \in \{0,1\} \; \forall i \in \overline{1,n} \}$

Lösungsansatz 2: dynamische Optimierung.

Betrachte das Problem als eine Folge von binären Entscheidungen $x_i \in \{0,1\}$, wobei

$x_i = 1$ g.d.w., wenn Objekt i in die Teilmenge aufgenommen wird, ansonsten $x_i = 0$.

Die Entscheidungen werden in Stufen (Iterationen) getroffen mit 1 Entscheidung pro Stufe.

Sei W_t die übrig gebliebene Kapazität in Stufe t, $t \in \overline{1,n}$. Es gilt $W_1 = W$.

Sei $J_t(W_t)$ der optimale Nutzen einer Teilmenge von Objekten aus $\overline{t,n}$, die ein Gesamtgewicht $\leq W_t$ haben.

Dann gilt $\forall t \in \overline{1, n-1}$ $\forall W_t \in [0, W]$

$$J_t(W_t) = \begin{cases} J_{t+1}(W_t) & \text{falls } w_t > W_t \\ \max\{J_{t+1}(W_t), J_{t+1}(W_t - w_t) + v_t\} & \text{falls } w_t \leq W_t \end{cases} \quad (*)$$

Für die Stufe n gilt

$$J_n(W_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w_n > W_n \\ v_n & \text{falls } w_n \leq W_n \end{cases}$$

Wenn $J_t(W)$ $\forall W$ bekannt ist, kann man $J_{t-1}(W)$ $\forall W$ in konstanter Zeit $\forall$ fix berechnen, in dem $(*)$ angewandt wird. Letzendlich liegt $J_1(W)$ vor und das is Optimalen Lösung für $KP(W; v_1, \dots, v_n, w_1, \dots w_n)$.

Anz Input vl genzt $\Rightarrow O(nW)$.

Bestimmung der Optimallösung via Backtracking:

In jeder Stufe speichert man den Wert der optimalen Entscheidung, i.e. $x_t(W_t) = 0$ falls $J_t(W_t)$ gleich dem Wert des Ausdruck in der oberen Teile von $(*)$ oder gleich dem Wert des linken Ausdrucks in der unteren Teile von $(*)$ gesetzt wird. Ansonsten $x_t(W_t) = 1$.

Diese Werte speichert man $\forall W_t \in [0, W]$.

(oder wenn $v_i, w_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \overline{1, n}$ und $W \in \mathbb{Z}$ dann reicht es die Werte $J_t(W_t)$ $\forall t \in \overline{1, n}$ und $\forall W_t \in [0, W] \cap \mathbb{Z}$ zu speichern).

Dann setzt man $x_1 = x_1(\lceil W \rceil)$, $x_2 = x_2(\lceil W \rceil - x_1 w_1)$,

$$\ldots \quad x_k := x_k\left(W - \sum_{i=1}^{k-1} x_i v_i\right), \ldots \quad x_n = x_n\left(W - \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i\right)$$

und erhält somit eine Optimallösung des Problems.

(2) Das optimale Konsumationsproblem

Annahme: Am Anfang des Zeithorizonts (Jahr 0) stehen $W_0 > 0$ Kapitaleinheiten zur Verfügung.
Am Anfang eines jeden Jahres t kann entschieden werden c_t Kapitaleinheiten zu konsumieren und die restliche Menge des z. Zeitpunkt t verfügbaren Kapitals in Staatsanleihen zu investieren.
Das Investierte Kapital c_t generiert einen Nutzen $u(c_t)$. Die Investition an Staatsanleihen bringt pro Kapitaleinheit $(1+r)$. Kapitaleinheiten am Anfang des nächsten Jahres. Sei T die Länge des Zeithorizonts.

Ziel:
$$\max_{c_0, \ldots, c_T} \sum_{t=0}^{T} u(c_t)$$

Lösung: Sei W_t das zu Beginn von Jahr t verfügbare Kapital.

Sei $J_t(W_t)$ der optimale Nutzen der in den Jahren $t, t+1, \ldots, T$ getätigten Investitionen ausgehend von W_t Kapitaleinheiten zu Beginn von Jahr t.

$\forall\, t \in \overline{0, T-1}\,, \ \forall\, W_t$ gilt

$$J_t(W_t) = \max_{0 \le C_t \le W_t} \left\{ J_{t+1}\left(\underbrace{(W_t - C_t)}(1+r) \right) + u(C_t) \right\}$$

und der Maximierer $C_t^*(W_t) \left(C_t^* \in \arg\max_{0 \le C_t \le W_t} \left\{ J_{t+1}((\ldots)(\ldots)) + u(C_t) \right\} \right)$

ist die optimale Konsumation im Jahr t.

In der letzten Periode (Jahr) gilt

$$J_T(W_T) = u(W_T) \quad \text{und} \quad C_T^* = W_T, \ \forall\, W_T.$$

$J_0(W)$

Das deterministische Modell eines sequentiellen Systems

(aus Bertsekas 2005, Dynamic programming and optimal control, Athena Scientific)

Ein sequentielles System wird durch folgende Größen definiert:

Stufen: Das sind Zeitpunkte t in denen Entscheidungen getroffen werden. Üblich betrachten wir $t \in \overline{0, T}$ oder $t \in \overline{1, T}$ endlichen Problem

Zustand: Der Zustand des Systems in einer bestimmten Stufe ist die zum entsprechenden Zeitpunkt verfügbare und für die bevorstehenden Entscheidungen relevante Information. Notation: s_t, $t \in \overline{0, T}$ ($t \in \overline{1, T}$)
Manchmal wird auch ein „Endzustand" s_{T+1} eingeführt.

(5)

Entscheidungen: Das sind die Entscheidungen (controls, actions), die in jeder Stufe getroffen werden und das Verhalten bzw. die zukünftigen Zustände des Systems beeinflussen. Notation x_t, $t \in \overline{0,T}$.

Evolutionsgesetz: definiert wie sich der Zustand des Systems entwickelt

$$s_{t+1} = f_t(s_t, x_t) \quad t \in \overline{0, T-1}$$

(oder $t \in \overline{0,T}$)

Zielfunktion: stellt den Gewinn (Nutzen) oder die Kosten pro Stufe abhängig von Zustand und der getroffenen Entscheidung dar, Notation $g_t(s_t, x_t)$ $t \in \overline{0,T}$ bzw $g_{T+1}(s_{T+1})$

Ziel: Bestimme x_t, $t \in \overline{0,T}$, sodass die Gesamtzielfunktion

$$\sum_{t=0}^{T} g_t(s_t, x_t) + g_{T+1}(x_{T+1})$$

optimiert wird.

Das Rucksack-problem und das optimale Konsumations problem

können beide als deterministische sequentielle Systeme dargestellt werden.

zB KP (W; $v_1, \dots, v_n$; $w_1, \dots, w_n$), optimale Kons.problem

Stufen: $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ $t \in \{0, 1, \dots, T\}$

Zustand: Restkapazität W_t; verfügbares Kapital W_t $W_{T+1} = 0$

Entscheidung in Stufe t: $x_t \in \{0,1\}$ sodass Konsumation $C_t \in [0, W_t]$

$w_t > W_t \Rightarrow x_t = 0$;

Evolutionsgesetz: $W_{t+1} = W_t - w_t x_t$, $t = \overline{1, n-1}$ (6)

$w_{t+1} = (W_t - C_t)(1+r)$, $t \in \overline{0, T}$

Zielfunktion in Stufe i $v_i x_i$ $U(C_t)$

Gesamtzielfunktion $\max\limits_{x_1,\dots,x_n} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$ $\max\limits_{C_0, C_1, \dots, C_T} \sum_{t=0}^{T} U(C_t)$

Das Bellman'sche Optimalitätsprinzip (BOP)

sei $J_0(s_0) := \max\limits_{x_0,\dots,x_T} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \alpha^t g_t(s_t, x_t) + g_{T+1}(s_{T+1}) \right\}$

tail problem

Betrachte nun das Teilproblem, das in Stufe t "startet" und in Stufe T "endet".

$$J_t(s_t) := \max_{x_t,\dots,x_T} \left\{ \sum_{\tau=t}^{T} g_\tau(s_\tau, x_\tau) + g_{T+1}(s_{T+1}) \right\}$$

Diskontfaktor, $\alpha \in (0,1)$

falls das Problem unendlich

Die Bellman'sche Gleichung:

$$J_t(s_t) = \max_{x_t} \{ g_t(s_t, x_t) + \alpha J_{t+1}(\underbrace{f_t(s_t, x_t)}_{s_{t+1}}) \} \quad \forall t \in \overline{0, T}$$

$$x_t^*(s_t) \in \operatorname*{argmax}_{x_t} \{ g_t(s_t, x_t) + J_{t+1}(f_t(s_t, x_t)) \} \quad \forall t \in \overline{0, T}$$

ist eine optimale Entscheidung in Stufe t bei Zustand s_t, hängt also nicht nur von t sondern auch vom Zustand s_t ab.

Der Vektor $x_0^*(\cdot), x_1^*(\cdot), \dots, x_T^*(\cdot)$ heißt eine optimale Politik.

Alternative Formulierung des BOP:

Sei $(x_0^*(\cdot), \dots, x_T^*(\cdot))$ eine optimale Politik für das gesamte Problem. Dann ist $(x_t^*(\cdot), \dots, x_T^*(\cdot))$ eine optimale Politik für das Teilproblem beginnend in Stufe t (Ende in Stufe T)

Dynamisches Handeln mit prognostizierbaren Renditen und Transaktionskosten (Gârleanu, Pedersen 2013) 7

Idee: Trade off zwischen Kosten und Ertrag
Handeln verursacht Kosten und es generiert Ertrag.

Betrachte ein Universum von n Assets mit Renditen r_t Zeitindex die folgender Gleichung genügen:

$$\boxed{r_{t+1} = B f_t + u_t,}$$ wobei $r_{t+1} \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ m #Faktoren

$f_t \in \mathbb{R}^m$ ist ein Vektor von Faktorrenditen, B ist eine Matrix von Faktorladungen und $u_t \in \mathbb{R}^n$ ist ein idiosynkratischer Fehler mit Erwartungswert $= 0$ und konstanter Kovarianzmatrix $\Sigma := \mathrm{var}_t(u_t)$.
(üblicherweise $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{nn})$)

Annahme: Der Vektor der Faktorrendite ist dem Investor bekannt und es gilt $\boxed{\Delta f_{t+1} = -\Phi f_t + \varepsilon_{t+1}}$
wobei $\Delta f_{t+1} := f_{t+1} - f_t$. $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^m$

Weiters gibt es hohe Transaktionskosten $TC(\Delta x_t)$ die mit $\boxed{\Delta x_t = x_t - x_{t-1}}$ folgendermaßen zusammenhängen:

$$TC(\Delta x_t) = \frac{1}{2} \Delta x_t^T \Lambda \Delta x_t \quad \text{mit } \Lambda \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \text{ symmetrisch}$$
$\Lambda \succ 0$ (pos. def.)

Risiko aversion Faktor

Zielfunktion: $$\max_{x_0, x_1, \dots} E_0\left(\sum_{t=0} \left[(1-\rho)^{t+1} \left(r_{t+1}^T x_t - \frac{\gamma}{2} x_t^T \Sigma x_t \right) - \frac{(1-\rho)^t}{2} \Delta x_t^T \Lambda \Delta x_t \right] \right)$$

Wobei $1-\rho$ ist ein Discountfaktor $\rho \in (0,1)$

Gârleanu und Pedersen charakterisieren die optimale Handelspolitik mit Hilfe der dynamischen Optimierung.

Stufen $t = 0, 1, \dots N, \dots$

Zustand in Stufe t: $(x_{t-1}, f_t) \rightarrow$ "value-to-go function"

Die Zielfunktion in Stufe t (des Teilproblems beginnend in Stufe t)

$$V(x_{t-1}, f_t) = \max_{x_t, x_{t+1}, \dots} E_t\left(\sum_{\tau=t}^{\infty} (1-\rho)^{\tau+1-t} \left(r_{\tau+1}^{t} x_\tau - \frac{\gamma}{2} x_\tau^T \Sigma x_\tau \right) - \frac{(1-\rho)^{\tau-t}}{2} \Delta x_\tau^T \Lambda \Delta x_\tau \right)$$

Die Bellman'sche Gleichung:

$$V(x_{t-1}, f_t) = \max_{x_t} \left\{ -\frac{1}{2} \Delta x_t^T \Lambda \Delta x_t + (1-\rho) \left(E_t(r_{t+1}^T x_t) - \frac{\gamma}{2} x_t^T \Sigma x_t + E_t\left[V(x_t, f_{t+1}) \right] \right) \right\}$$

Ansatz: $$V(x_t, f_{t+1}) = -\frac{1}{2} x_t^T A_{xx} x_t + x_t^T A_{xf} f_{t+1} + \frac{1}{2} f_{t+1}^T A_{ff} f_{t+1} + a_0$$

Mit diesem Ansatz kann man zeigen, dass die optimale Handelspolitik folgendermaßen lautet

$$(**) \quad x_t = x_{t-1} + \Lambda^{-1} A_{xx} \Big(\underbrace{A_{xx}^{-1} A_{xf} f_t}_{=: y_t} - x_{t-1} \Big)$$

aim portfolio

Weiters erhält man Ausdrücke für die Matrizen A_{xx}, A_{xf}, A_{ff}

Im Spezialfall $\Lambda = \lambda \Sigma$ erhält man

$$x_t = \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) x_{t-1} + \frac{a}{\lambda} A_{xx}^{-1} A_{xf} f_t$$

mit $$a = \frac{-(\gamma(1-\rho) + \lambda\rho) + \sqrt{(\gamma(1-\rho) + \lambda\rho)^2 + 4\gamma\lambda(1-\rho)^2}}{2(1-\rho)}$$

9

Beobachtung: Falls es keine Transaktionskosten gibt

$Markowitz_t = (\gamma \Sigma)^{-1} B f_t$ (Lösung des statischen MVO)

Mit $\Lambda = \lambda \Sigma$ und $z := \dfrac{\gamma}{\gamma + a}$ erhält man

$$\boxed{Y_t = z \cdot Markowitz_t + (1-z)\, E(Y_{t+1})} \quad (***)$$

aim

$$= \sum_{\tau=t}^{\infty} z(1-z)^{\tau - t} E_t(Markowitz_\tau)$$

und $y_t = (\gamma \Sigma)^{-1} B \left(1 + \dfrac{a}{\gamma} \phi\right)^{-1} f_t$ (ähnlich in Form wie $Markowitz_t$)

Y_t wird als Ziel pf. betrachtet (aim_t)

Das optimale aktualisierte PF ist eine Linearkombination des existierenden (alten) PF und des Ziel PF ~~(**)~~. Letzteres ist ein gewichteter Durchschnitt des aktuellen Markowitz-PF (the moving target) und den erwarteten Markowitz-PF in allen zukünftigen Zeitpunkten (where the target is moving) ~~(**)~~.