Beweis von Satz 3

Szenarien: m, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$

Wertpapiere: n, $\{1, 2, \dots, n\}$

Preise der Wertpapiere zum Zeitpunkt t_0 (heute)

$$S_0^{(i)}, \quad 1 \le i \le n$$

Preise der Wertpapiere zum Zeitpunkt t_1 $(t_1 > t_0)$ → Zukunft

je nach Szenario $S_1^{(i)}(j)$, $\forall i \in \overline{1,n}$, $\forall j \in \overline{1,m}$

Risikoloses Wertpapier (Bargeld) $i = 0$

mit den Preisen $S_0^{(0)} = 1$, $S_1^{(0)}(j) = 1 + r = R$

r → risikoloser Zinssatz konstant in $[t_0, t_1]$

Konstruiere kostenminimale PF bestehend aus

x_i Stück von Wertpapier i, $i \in \overline{0,n}$

mit Kosten $\sum_{i=0}^{n} S_0^{(i)} x_i$ zum Zeitpunkt t_0,

unter der Bedingung, dass der ~~Preis~~ Wert des PF zum Zeitpunkt t_1 ≥ 0 ist, unabh. von Szenario:

$$\sum_{i=0}^{n} S_1^{(i)}(j)\, x_i \geq 0 \quad \forall j \in \overline{1,m}$$

Betrachte das LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=0}^{n} S_0^{(i)} x_i \\ (P) \text{ udNB} & \sum_{i=0}^{n} S_1^{(i)}(j)\, x_i \geq 0 \quad \forall j \in \overline{1,m} \end{array}}$$

Das duale des obigen Problems P

$$\max \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot$$

u.d.NB

(D)
$$\sum_{j=1}^{m} S_1^{(i)}(j)\, y_j = S_0^{(i)} \quad \forall i \in \overline{0,n}$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall \; j \in \overline{1,m}$$

Nun zeigen wir die Äquivalenz

(1) ∄ Arbitrage $\Longleftrightarrow$ (D) besitzt eine strikt positive Optimallösung

$\Longrightarrow$) Annahme: ∄ Arbitrage

∄ Arbitrage vom Typ A $\Longrightarrow$ $\forall$ zulässige Lösung x von P gilt $\sum_{i=0}^{n} S_0^{(i)} x_i \geq 0$ (denn negative Kosten wären ein Gewinn ohne Risiko auf Verluste in der Zukunft)

Da $x_i^* = 0$, $\forall i \in \overline{0,n}$, eine zulässige Lösung von P, den Zielfunktionswert 0 liefert, ist dies auch eine Optimallösung.

Der Starke Dualitätssatz impliziert: $\exists$ Optimallösung y^* von D mit Zielfunktions Wert 0.

∄ Arbitrage von Typ B ⇒ Jede Optimallösung von P erfüllt alle Restriktionen mit Gleichheit (sonst gäbe es eine positive Wahrsch. für einen Gewinn, kein Risiko auf Verluste bei einer Null-Investition z. Zeitpunkt t_0). D.h. $\forall$ Opt.lösung x^* von P gilt $\sum_{i=0}^{m} S_i^{(1)}(j) x_i^* = 0$. (*)

Der strikte kompl. Satz lässt sich anwenden (weil beide P und D besitzen Opt.lösungen) impliziert: $\exists\ (\bar{x}, \bar{y})$, ein Paar von Opt.lösungen für P bzw D, sodass $\sum_{i=0}^{m} S_i^{(1)}(j)\,\bar{x}_i + \bar{y}_j > 0$ gilt, $\forall j \in \overline{1,m}$.

Mit (*) liefern die letzten Ungleichungen $\bar{y}_j > 0, \forall j$

$\Leftarrow$) Annahme: $\exists$ risikoneutrales Wahrsch.maß p

D.h. es gilt $p_j > 0, \forall j$; $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$; $S_i^{(0)} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{m} S_i^{(1)}(j)\, p_j$

Somit ist $\left(\frac{p_j}{R}\right)_{1 \le j \le m}$ eine strikt positive Lösung von D

Da D eine konstante Zielfunktion hat, ist $\left(\frac{p_j}{R}\right)_{1 \le j \le m}$ auch eine Opt.lösung von D. $\Rightarrow \exists$ opt lösung von P mit Zielfkt.wert 0 $\Rightarrow$ ∄ keine Arbitrage von Typ A.

Der ~~...~~ duale komplem. Satz impliziert nun: (4)

$\forall$ Opt. lösung x^* von P gilt $\frac{p_j}{R} \sum_{i=0}^{n} S_1^{(i)}(j)\, x_i^* = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} S_1^{(i)}(j)\, x_i^* = 0 \Rightarrow \nexists$ Arbitrage vom Typ B.

Ende des Beweises der Äquivalenz $\boxed{}$

Nun beweisen wir

(2) $\nexists$ Arbitrage $\Longleftrightarrow \exists$ risikoneutrales Wahrsch.maß

Aus Äquivalenz 1:

$\nexists$ Arbitrage $\Longleftrightarrow$ D besitzt eine positive Opt. lösung $\bar{y}$

Nun für jede positive Opt. lösung $\bar{y}$

ist $p := \frac{1}{R}\bar{y}$ ein risikoneutrales Wahrsch.maß

und für ein risikoneutrales Wahrsch.maß

p ist $R \cdot p =: \bar{y}$ eine Opt. lösung (weil zulässig) von D.

$\boxed{}$