Replikation (Nachbildung)

Die Replikation wird oft zur Bepreisung von Optionen (Derivaten) verwendet:
für eine gegebene Option wird ein Portfolio konstruiert derart, dass die Auszahlung des Portfiolios dem Payoff der Option am Ende der Optionslaufzeit entspricht.

Ein derartiges Portfolio heißt **replizierendes Portfolio (RPF)**.

Der aktuelle Wert des RPF entspricht **dem fairen Preis der Option**.

In der Regel besteht das RPF aus einer Bargeldposition und aus anderen Assets, inbesondere aus dem Primärgut, das der Option zugrunde liegt.

Mögliche (unrealistische) Annahmen eines Grundmodells:

(i) kein Zinssatz für das Ausborgen von Bargeld

(ii) provisionsfreier Ankauf/Verkauf von Assets

Ein einfaches Beispiel

Betrachte ein Primärgut (*U*nderlying) mit Preis S_0 zum aktuellen Zeitpunkt t_0.
Zwei mögliche Szenarien für den Preis S_1 zum Zeitpunkt $t_i > t_0$:

(1) *u*p-Szenario mit $S_1 = S_1^{(u)} = uS_0$

(2) *d*own-Szenario mit $S_1 = S_1^{(d)} = dS_0$,

wobei d, u zwei gegebene Konstanten mit $u > d > 0$ sind.

Sei r der konstante Zinssatz für Bargeld im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ und sei $R := 1 + r$.

Betrachte ein Derivat des Primärguts mit Payoff $C_1^{(u)}$ bzw. $C_1^{(d)}$ in den jeweiligen Szenarien.

RPF bestehend aus x Einheiten des Primärguts und y Einheiten Barged.

Wert des RPF zum Zeitpunkt t_1 in den zwei Szenarien:

(1) up-Szenario: $xS_1^{(u)} + Ry = xuS_0 + Ry$

(2) down-Szenario: $xS_1^{(d)} + Ry = xdS_0 + Ry$

Fortsetzung des einfachen Beispiels

Aus dem System der linearen Gleichungen $C_1^{(u)} = xuS_0 + Ry$ und $C_1^{(d)} = xdS_0 + Ry$ lassen sich die Positionen x und y des RPF bestimmen:

$$x = \frac{C_1^{(u)} - C_1^{(d)}}{S_0(u-d)} \text{ und } y = \frac{uC_1^{(d)} - dC_1^{(u)}}{R(u-d)}$$

Preis C_0 des Derivats zum Z.punkt t_0 := Wert des RPF zum Z.punkt t_0:

$$C_0 = S_0 x + y = S_0 \frac{C_1^{(u)} - C_1^{(d)}}{S_0(u-d)} + \frac{uC_1^{(d)} - dC_1^{(u)}}{R(u-d)} = \frac{1}{R}\left[\frac{R-d}{u-d} C_1^{(u)} + \frac{u-R}{u-d} C_1^{(d)}\right]$$

Bezeichne $p_u := \frac{R-d}{u-d}$, $p_d := \frac{u-R}{u-d}$ und beobachte, dass $p_u + p_d = 1$.
Falls $p_u > 0$ und $p_d > 0$, dann heißen p_u, p_d **risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten** der zwei Szenarien.

Fazit: Der faire Preis des Derivats zum aktuellen Zeitpunkt ist als diskontierter Erwartungswert seiner zukünftigen Payoffs gegeben, wobei der Erwartungswert mit Hilfe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten berechnet wird.

Definition 1.

Eine Arbitrage ist eine Handelsstrategie die

(A) *einen positiven angfänglichen Geldfluss und kein Risiko für spätere Verluste aufweist (Typ A Arbitrage), oder*

(B) *keinen initialen Geldfluss benötigt, kein Risiko von späteren Verlusten beinhaltet und eine positive Wahrscheinlichkeit für einen späteren Gewinn aufweist (Typ B Arbitrage).*

Beobachtung: Unter der Annahme, dass es keine Arbitrage gibt (*no Arbitrage*) gilt $d < R < u$ beim Beispiel des zwei-Szenarien-Modells.

Annahme: $R \leq d$. Betrachte folgende Handelsstrategie.
Zeitpunkt t_0: Borge S_0 Einheiten Bargeld aus und kaufe damit 1 Einheit des Primärguts.

Zeitpunkt t_1: Verkaufe das Primärgut (um mindestens $S_1^{(d)} = dS_0$) und retourniere $S_0 R$ Einheiten Bargeld. Positive Wahrsch. für einen Nettogewinn von mindestens $(u - R)S_0 > (d - R)S_0 \geq 0$. Typ B Arbitrage!
Hausaufgabe: Konstruieren Sie eine Arbitrage unter der Annahme $R > u$.

Schlussfolgerung im Fall des zwei-Szenarienmodells:

Unter der no-Arbitrage Annahme existieren die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten.

Das ist kein Zufall, eine analoge Aussage gilt in einem allgemeineren Kontext.

Ein diskretes Modell mit endlicher Anzahl von Szenarien (DMES)

Seien $i \in \{1, \ldots, n\} =: \overline{1,n}$ Wertpapiere mit Preisen $S_0^{(i)}$ zum Z.punkt t_0.
Sei $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ eine Menge von Preisentwicklungsszenarien ω_j, $j \in \overline{1,m}$.
Sei $S_1^{(i)}(j)$ der Preis von Wertpapier i zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ bei Szenario ω_j, für $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$. Ein risikoloses Wertpapier (zB. Bargeld) sei mit 0 indexiert: $S_0^{(0)} = 1$, $S_1^{(0)}(j) = 1 + r = R$ für alle $j \in \overline{1,m}$.

Definition 2.

Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß in Ω ist ein Vektor $p \in (0,1)^m$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1 \text{ und } S_0^{(i)} = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^{m} p_j S_1^{(i)}(j)\,,\ \forall i \in \overline{1,n}.$$

Der erste fundamentale Satz über die Bepreisung von Assets (eine diskrete Version)

Satz 1.

Betrachten wir das Modell DEMS. Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß in Ω existiert dann und nur dann, wenn es keine Arbitrage gibt.

Erinnerung: Dualitätstheorie der linearen Optimierung.

Sei (P, D) ein primal-duales Paar von linearen Optimierungproblemen:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.t.} & \\ & Ax \geq b \end{array} \qquad (\mathbf{P}) \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & b^t y \\ \text{s.t.} & \\ & A^t y = b \\ & y \geq 0 \end{array} \qquad (\mathbf{D})$$

Satz 2.

(Dualer Komplementaritätssatz)
Jedes Paar (x^*, y^*) von optimalen Lösungen der Probleme P und D des primal-dualen Paars (P,D) wie oben erfüllt
<u>die Komplementaritätsbedingungen</u> $(Ax - b)y = 0$.

Der erster fundamentale Satz über die Bepreisung von Assets (eine diskrete Version) - Fortsetzung

Satz 3.

(Strikter Komplementaritätsatz, Goldmann und Tucker 1956)
Falls die Probleme P und D des primal-dualen Paars (P,D) wie oben optimale Lösungen besitzen, dann existiert auch ein Paar (x^*, y^*) von optimalen Lösungen, das die strikten Komplementaritätsbedingungen $Ax - b + y > 0$ erfüllt.

Beweis von Satz 1: Konstruiere zum Zeitpunkt t_0 ein kostenminimales Portfolio bestehend aus x_i Stück von Wertpapier i, $i \in \overline{0, n}$, under der Bedingung, dass der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t_1 in jedem Szenario nichtnegativ ist:

$$\min \left\{ \sum_{i=0}^{n} S_0^{(i)} x_i : \sum_{i=0}^{(n)} S_1^{(i)}(j) x_j \geq 0 \,,\ 1 \leq j \leq m \right\}$$

Es gilt folgende Äquivalenz: Es gibt keine Arbitrage in DEMS dann und nur dann, wenn das duale Problem des obigen Minimierungsproblems eine strikt positive Optimallösung besitzt.
Die passend skalierte Optimallösung des dualen Problems ist nun ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß in Ω.